

# Doporučení – Vyjadřování a používání nejistot v klinické dozimetrii

---

Aktualizace 2023

## Obsah

|   |    |
|---|----|
| Zkratky.....  | 4  |
| Předmluva .....   | 5  |
| 1. Úvod .....   | 6  |
| 2. Přehled názvosloví a symbolů .....   | 7  |
| 3. Stanovení standardní nejistoty měření .....  | 9  |
| 3.1 Stanovení nejistot hodnot vstupních veličin $X_i$ .....   | 10 |
| 3.1.1 Nejistota typu A.....   | 10 |
| 3.1.2 Nejistota typu B.....   | 11 |
| 3.1.3 Výpočet kombinované standardní nejistoty jedné vstupní veličiny.....  | 12 |
| 3.1.4 Výpočet nejistoty při interpolaci mezi hodnotami se známou nejistotou .....   | 12 |
| 3.2 Stanovení hodnoty výstupní měřené veličiny $Y$ .....  | 13 |
| 3.3 Stanovení nejistoty hodnoty výstupní měřené veličiny $Y$ .....  | 14 |
| 3.3.1 Výpočet koeficientů citlivosti $c_i$ .....  | 14 |
| 3.3.2 Výpočet standardní nejistoty měření pro případ nekorelovaných vstupních veličin....                                   | 14 |
| 3.3.3 Výpočet standardní nejistoty měření pro případ korelovaných vstupních veličin.....                                    | 15 |
| 3.4 Postup pro stanovení hodnoty výstupní měřené veličiny a její nejistoty - shrnutí.....                                   | 15 |
| 3.5 Základní vztahy pro výpočet standardní nejistoty měření - přehledná tabulka.....  | 16 |
| 4. Stanovení standardní nejistoty v klinické dozimetrii – v radioterapii .....  | 17 |
| 4.1 Nejistoty hodnot vstupních veličin.....   | 17 |
| 4.2 Nejistota dávky v elektronových svazcích při použití křížově kalibrované planparalelní ionizační komory .....           | 18 |
| 4.3 Rentgenové svazky nízkých a středních energií .....   | 18 |
| 4.4 Nestandardní vysokoenergetická fotonová pole .....  | 19 |
| 5. Stanovení standardní nejistoty v klinické dozimetrii – v radiodiagnostice .....  | 20 |
| 6. Příklady postupu pro stanovení hodnoty měřené veličiny a její nejistoty .....  | 21 |
| 6.1 Příklad č. 1: Stanovení absorbované dávky ve vodě za referenčních podmínek ve vysokoenergetickém fotonovém svazku ..... | 21 |
| 6.2 Příklad č. 2: Stanovení kermové vydatnosti zdroje $^{192}\text{Ir}$ v brachyterapii pomocí kalibračního můstku.....     | 27 |
| 7. Posouzení shody výsledku měření se specifikací/požadavkem, rozhodovací pravidla .....                                    | 32 |
| 7.1 Doporučení SÚJB, metodiky (fixní tolerance).....  | 32 |
| 7.2 Srovnání výsledků měření dvou subjektů na základě statistické inference .....   | 32 |
| 7.2.1. Model absorbované dávky .....  | 33 |
| 7.2.2. Obecný model pro statistické posouzení .....   | 34 |
| 7.2.3. Postup.....  | 35 |

|                                       |   |    |
|---------------------------------------|---|----|
| 7.2.4.                                | Jednotlivé scénáře pro fotony .....   | 35 |
| 7.2.5.                                | Postup pro jednotlivé scénáře pro elektrony.....  | 37 |
| 7.2.6.                                | Rozdíly dávek.....  | 37 |
| 7.3                                   | ILAC (popisuje-li specifikace interval s horní a dolní mezí) .....  | 38 |
| 7.3.1                                 | Uvádění shody se specifikací pro jednotlivou veličinu .....   | 38 |
| 7.3.2                                 | Uvádění shody s požadavky nebo specifikacemi v případě několika veličin .....                                     | 40 |
| Přílohy:.....                         |   | 41 |
| A.                                    | Rozšiřující výklad statistických a pravděpodobnostních pojmů použitých ve vztazích k výpočtu nejistot.....        | 41 |
| B.                                    | Statisticky řízená kontrola procesu (SPC) .....   | 55 |
| B.1                                   | Volba dat pro analýzu.....  | 56 |
| B.2                                   | Výpočet průměrů, výběrových směrodatných odchylek a rozpětí .....   | 56 |
| B.3                                   | Výpočet přirozených regulačních mezí.....   | 57 |
| B.4                                   | Získání statisticky zvládnutého procesu .....   | 59 |
| B.5                                   | Tvorba technických regulačních mezí .....   | 59 |
| B.6                                   | Tvorba rozšířených regulačních mezí s využitím směrodatné odchylky .....  | 61 |
| B.7                                   | Stanovení ukazatelů způsobilosti a výkonnosti a výpočet pravděpodobností výskytu hodnoty mimo regulační meze..... | 62 |
| B.8                                   | Hodnocení nenáhodného chování procesu .....   | 64 |
| B.9                                   | Příklady .....  | 64 |
| Formulář v Excelu .....               |   | 66 |
| Slovník a zkratky pro přílohu B ..... |   | 67 |
| Literatura .....                      |   | 69 |
| Autoři.....                           |   | 71 |

## Zkratky

|              |   |
|--------------|---|
| BIPM         | Bureau International des Poids et Mesures   |
| CV           | variační koeficient ( <i>Coefficient of variation</i> )   |
| ČIA          | Český institut pro akreditaci, o.p.s.   |
| FFF svazek   | svazek bez homogenizačního filtru ( <i>Flattening filter free beam</i> )                            |
| GUM          | Guide to the expression of uncertainty in measurement   |
| IK           | ionizační komora  |
| ILAC         | International Laboratory Accreditation Cooperation  |
| JCGM         | Společný výbor pro pokyny v metrologii ( <i>Joint Commission for Guides in Metrology</i> )          |
| KL           | kalibrační laboratoř  |
| PDD          | hloubková dávková křivka ( <i>Percentage depth dose</i> )   |
| pp IK        | planparalelní ionizační komora  |
| PSDL         | primární standardizační dozimetrická laboratoř ( <i>Primary Standard Dosimetry Laboratory</i> )     |
| PZ           | přejímací zkouška   |
| rtg          | rentgenový  |
| $\sigma^2$   | rozptyl ( <i>Variance</i> )   |
| sd, $\sigma$ | směrodatná odchylka ( <i>Standard deviation</i> )   |
| SPC          | statisticky řízená kontrola procesu ( <i>Statistical Process Control</i> )                          |
| SSDL         | sekundární standardizační dozimetrická laboratoř ( <i>Secondary Standard Dosimetry Laboratory</i> ) |
| ÚNMZ         | Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví                                   |
| VIM          | International vocabulary of metrology   |
| WFF          | svazek s homogenizačním filtrem ( <i>Beam with flattening filter</i> )                              |
| ZIZ          | zdroj ionizujícího záření   |
| ZDS          | zkouška dlouhodobé stability  |
| ZPS          | zkouška provozní stálosti   |

## Předmluva

## 1. Úvod

V případě hodnocení vlastností zdrojů ionizujícího záření (dále jen ZIZ) používaných v radioterapii obsahuje § 26 vyhlášky č. 422/2016 Sb. požadavek na stanovení nejistot dozimetrických veličin důležitých z hlediska účelu použití ZIZ. Za dozimetrické veličiny, u kterých je nutné stanovit nejistotu, se považuje absorbovaná dávka za referenčních podmínek a v případě brachyterapie kermová vydatnost. V případě hodnocení vlastností ZIZ používaných v radiodiagnostice legislativa nepožaduje stanovovat nejistotu dozimetrických veličin (kerry ve vzduchu), nicméně stanovení nejistoty by i zde mělo být nedílnou součástí klinické dozimetrie při hodnocení vlastností ZIZ.

Požadavek na stanovení nejistot v klinické dozimetrii není samoúčelný. Znalost nejistot hodnot stanovených veličin je nutná při porovnávání těchto hodnot se specifikací nebo s jiným subjektem. A navíc, zkoušky ZIZ se provádějí s určitou frekvencí a s určitou tolerancí, obvykle uvedenou v doporučení SUJB nebo v normě, ale s pomocí statistického přístupu lze frekvence i tolerance vyladovat.

Výchozím podkladem pro **stanovování nejistot absorbované dávky ve vodě v radioterapii** je doporučení IAEA *TRS 398 Absorbed Dose Determination in External Beam Radiotherapy* (TRS 398) [1], které vyjadřuje nejistoty dle ISO [14], a doporučení *TRS 483 Dosimetry of Small Static Fields Used in External Beam Radiotherapy* (TRS 483) [16], které vyjadřuje nejistoty dle [8] a [15], a které je promítnuto do doporučení SÚJB: *Stanovení absorbované dávky pro nestandardní vysokoenergetická fotonová pole* [17]. Při stanovení nejistot kermové vydatnosti u brachyterapeutických zdrojů se vychází z *IAEA-TECDOC-1274 Calibration of photon and beta ray sources used in brachytherapy* [2].

Výchozím podkladem pro **stanovování nejistot kerry ve vzduchu v radiodiagnostice** je doporučení IAEA *TRS 457 Dosimetry in Diagnostic Radiology: An International Code of Practice* (TRS 457) [6], které vyjadřuje nejistoty dle ISO [14], stejně jako TRS 398.

Pro seznámení se s hodnotami **nejistot dalších veličin v radioterapii** (nejen absorbované dávky) je možné využít publikaci IAEA *Human Health Series No. 31, Accuracy Requirements and Uncertainties in Radiotherapy* [18], v níž jsou uvedeny např. nejistoty spojené s ozařovačem, s polohou pacienta, se zobrazováním, definicí cílového objemu, s plánovacím systémem atd. Uvedené hodnoty nejistot a akčních limitů jsou shrnutím výsledků mnoha multicentrických studií.

Přehled názvosloví používaný v tomto doporučení je uveden v kapitole 2. Pro seznámení se s teorií týkající se nejistot měření a pro praktický postup stanovení nejistot lze využít kapitolu 3 tohoto doporučení. Kapitola 4 shrnuje důležitá upozornění týkající se stanovování nejistot v klinické dozimetrii – v radioterapii, z TRS 398. Kapitola 5 shrnuje důležitá upozornění týkající se stanovování nejistot v klinické dozimetrii – v radiodiagnostice, z TRS 457. Kapitola 6 uvádí příklady stanovení nejistot pro dávku ve vodě ve fotonovém svazku a pro kermovou vydatnost radionuklidového zdroje <sup>192</sup>Ir. Kapitola 7 uvádí různé přístupy k posouzení shody výsledku měření se specifikací a rozhodovací pravidla. Stručný přehled o matematickém aparátu, který stojí za vztahy použitými v doporučení, je uveden v příloze A. Statisticky řízená kontrola procesu je uvedena v příloze B. *Poznámky v textu doporučení a v příkladech v přílohách jsou uváděny kurzívou.*

Do této aktualizované verze doporučení pro vyjadřování nejistot v klinické dozimetrii byly oproti původní verzi z roku 2016 přidány kapitoly 2, 4, 5, 7.1, 7.2, příloha A a příloha B. Naopak vypuštěna byla kapitola Základní pojmy týkající se měření a nejistot měření – výňatky definic podle *Pokynu pro vyjadřování nejistoty měření (GUM)* [10] a *Terminologie z oblasti metrologie* [11], které jsou oficiálním překladem původních verzí dokumentů JCGM [8] a [9]. Aktuální verze dokumentů JCGM jsou volně dostupné na [www.bipm.org](http://www.bipm.org). Sborníky ÚNMZ jsou dostupné na adrese <https://www.unmz.cz/obecne/sborniky-unmz/>.

## 2. Přehled názvosloví a symbolů

### Názvy nejistot používané v tomto doporučení

| Název používaný v tomto doporučení (Příklad)   | Plný, správný nebo často používaný název   | Poznámky   |
|--|--|--|
| <b>Výstupní měřená veličina</b><br>(absorbovaná dávka)   | Měřená veličina  | Slovo „výstupní“ se v kapitole 2, 3 a 6 přidává proto, aby se v textu doporučení jednoznačně odlišila výsledná (výstupní) veličina od veličin vstupujících do modelu měření.   |
| <b>Model měření</b><br>( $D = M \cdot N_D \cdot k_{q,q_0} K$ )   | Model měření   | Vztah pro výpočet hodnoty měřené veličiny  |
| <b>Vstupní veličiny</b>  | Vstupní veličiny a ovlivňující veličiny  | Veličiny vstupující do modelu měření (odezva elektrometru, kalibrační koeficient, korekce na kvalitu svazku, na referenční podmínky...)  |
| <b>Standardní nejistota hodnoty vstupní veličiny</b>   | Standardní nejistota odhadu hodnoty vstupní veličiny   | Zkráceno (vynecháno slovo „odhadu“) z praktických důvodů.<br>Slovo „standardní“ znamená, že nejistota je vyjádřena jako směrodatná odchylka, a že tedy odpovídá $k = 1$ , v případě normálního rozdělení pravděpodobnosti pokrytí přibližně 68 %.  |
| <b>Nejistota typu A, nejistota typu B</b>  | Vyhodnocení nejistoty způsobem A, způsobem B   | Type A evaluation, Type B evaluation   |
| <b>Standardní nejistota hodnoty výstupní měřené veličiny</b><br>(standardní nejistota hodnoty absorbované dávky) | Kombinovaná standardní nejistota odhadu hodnoty výstupní měřené veličiny<br>(stanovované veličiny) | Slovo „kombinovaná“ znamená, že se jedná o standardní nejistotu získanou použitím dílčích standardních nejistot přidružených ke vstupním veličinám v modelu měření.<br>Ve vztahu k jedné vstupní veličině se slovem „kombinovaná“ rozumí součet nejistot typu A a typu B.<br>Slovo „kombinovaná“ je nadbytečné, pokud je řečeno, o nejistotu jaké veličiny se jedná. Proto je v textu tohoto doporučení vynecháváno. |
| <b>Rozšířená nejistota hodnoty výstupní měřené veličiny</b><br>(rozšířená nejistota hodnoty absorbované dávky)   | Rozšířená nejistota odhadu hodnoty výstupní měřené veličiny  | Slovo „rozšířená“ znamená, že Standardní nejistota hodnoty výstupní měřené veličiny byla vynásobena koeficientem rozšíření $k > 1$ , např. $k = 2$ , což v případě normálního rozdělení veličiny odpovídá pravděpodobnosti pokrytí přibližně 95 %.<br>Slovo „kombinovaná“ ani „standardní“ se u rozšířené nejistoty nepoužívá.   |
| <b>Relativní...nejistota...</b><br>(relativní standardní nejistota..., relativní rozšířená nejistota...)         | Relativní...nejistota...   | Výše uvedené nejistoty mohou být vyděleny hodnotou veličiny, ke které se vztahují. Potom se před název nejistoty přidá slovo „relativní“. Může být uvedeno jako podíl nebo v %.<br>Pokud se vyjádří nejprve relativní standardní nejistota a teprve pak se rozšiřuje, může být pořadí slov: rozšířená relativní nejistota.   |

### Názvy a symboly používané v tomto doporučení týkající se nejistoty typu A

| Parametr                      |   | Odhad parametru        |  | Nejistota             |  |
|-------------------------------|---|------------------------|--|-----------------------|--|
| Symbol                        | Název   | Symbol                 | Název  | Symbol                | název  |
| $\mu$                         | Střední hodnota<br>Skutečná hodnota<br>( <i>Expected value, mean</i> )                  | $\bar{x}$              | Aritmetický průměr<br>( <i>Arithmetic mean, average</i> )  |                       |  |
| $\sigma$<br>( <i>sd</i> )     | Směrodatná odchylka<br>( <i>Standard deviation</i> )                                    | $s(x)$                 | *Výběrová směrodatná odchylka souboru<br>( <i>Sample/experimental standard deviation</i> )   |                       |  |
| $\sigma^2$                    | Rozptyl<br>( <i>Variance</i> )  | $s^2(x)$               | *Výběrový rozptyl<br>( <i>Sample/experimental variance</i> )   |                       |  |
|                               |   | $s(\bar{x})$           | *Výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru,<br>$s(\bar{x}) = s(x)/\sqrt{n}$<br>( <i>Experimental standard deviation of the mean</i> ) | $u_A$                 | Standardní nejistota typu A hodnoty vstupní veličiny<br>( <i>Standard uncertainty</i> )                    |
| $\sigma/\mu$<br>( <i>CV</i> ) | Variační koeficient<br>( <i>Coefficient of variation, Relative standard deviation</i> ) | $s(\bar{x})/ \bar{x} $ | Výběrový variační koeficient pro aritmetický průměr  | $w_A = u_A/ \bar{x} $ | Relativní standardní nejistota typu A hodnoty vstupní veličiny<br>( <i>Relative standard uncertainty</i> ) |

\*Poznámka: Formálně toto označení není úplně správné, viz bod 7 příloha C. Správně je: odhad směrodatné odchylky, odhad rozptylu...



### 3. Stanovení standardní nejistoty měření

Cílem každého měření je získat kvantitativní informace o **měřené veličině**. Žádné skutečné měření ale není ideálně přesné. Měříme-li nějakou veličinu, naměřená hodnota vždy závisí na měřicím systému, často závisí na parametrech okolního prostředí, může záviset na postupu operátora a na dalších vlivech. Každé měření je tedy zatíženo chybou, jejíž velikost neznáme a v principu nemůžeme znát, protože žádným způsobem neumíme zjistit skutečnou (pravou) hodnotu měřené veličiny.

Přitom je ale velice důležité, abychom vždy uměli charakterizovat přesnost, s jakou bylo dané měření provedeno. K vyjádření přesnosti měření jsou v současné době využívány postupy založené na pojmu **nejistota měření**.

Tyto postupy pohlížejí na naměřenou hodnotu jako na **náhodnou veličinu**, jejíž hodnoty zjištěné při opakovaných měřeních jsou popsány určitým **rozdělením pravděpodobnosti**. Nejistotou měření pak rozumíme takový **interval hodnot měřené veličiny**, o kterém lze s určitou **předem stanovenou pravděpodobností** předpokládat, že obsahuje skutečnou (pravou) hodnotu měřené veličiny.

**Standardní nejistota měření** určuje takový interval hodnot měřené veličiny, o němž lze předpokládat, že s pravděpodobností cca 68 % obsahuje skutečnou (pravou) hodnotu měřené veličiny. V této publikaci jsou popsány postupy, kterými lze s dostatečnou spolehlivostí stanovit velikost standardní nejistoty měření.

V metrologické praxi (na kalibračních listech měřidel apod.) nebývá obvykle uváděna standardní nejistota měření  $u$ , ale takzvaná **rozšířená nejistota měření**. Rozšířenou nejistotu měření  $U$  získáme vynásobením standardní nejistoty  $u$  **koefficientem rozšíření  $k$** . Koefficient rozšíření je zpravidla volen tak, aby rozšířený interval hodnot měřené veličiny obsahoval skutečnou (pravou) hodnotu s pravděpodobností cca 95 %. Je-li ve výjimečných případech udáván koefficient rozšíření odpovídající jiné hodnotě **pravděpodobnosti pokrytí** než 95 %, musí být tato skutečnost u daného výsledku měření jasně uvedena.

Nejčastějším rozdělením pravděpodobnosti měřených hodnot, se kterým se v klinické dozimetrické praxi setkáváme, je **normální rozdělení** pravděpodobnosti, zvané též **Gaussovo rozdělení**. Tato skutečnost plyne z centrální limitní věty v teorii pravděpodobnosti. V případech, kdy lze usuzovat na normální (Gaussovo) rozdělení měřených hodnot, použijeme koefficient rozšíření  $k = 2$ , kterým vynásobíme vypočtenou standardní nejistotu měření. Takto rozšířený interval hodnot obsahuje skutečnou (pravou) hodnotu měřené veličiny s pravděpodobností přibližně 95 %.

Dalším pojmem, který je v tomto přístupu důležitý, je pojem **model měření**. Modelem měření rozumíme matematický vztah, který kvantitativně vyjadřuje závislost měřené veličiny  $Y$  na **vstupních veličinách** a **ovlivňujících veličinách**. Vstupní veličiny a ovlivňující veličiny budeme v této publikaci souhrnně označovat  $X_i$ . V modelu měření by měl být zahrnut nejen princip měřicí metody, ale i vliv prostředí, v němž měření probíhá, stejně jako vlivy dalších možných ovlivňujících veličin.

V klinické dozimetrii umíme obvykle model měření popsat funkčním vztahem v explicitním tvaru:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N) . \quad (1)$$

Konkrétním příkladem takového vztahu je např. vztah ( 22 ) v kapitole 6.1.

V této publikaci se nebudeme zabývat složitější situací, kdy modelová rovnice zahrnuje měřenou veličinu  $Y$  pouze implicitně a není ji možno upravit do explicitního tvaru ( 1 ).

Doporučené postupy pro stanovení standardní nejistoty měření jsou přehledně popsány například v dokumentu [4], z něhož text této kapitoly vychází, není-li uvedeno jinak.

### 3.1 Stanovení nejistot hodnot vstupních veličin $X_i$

U každé vstupní veličiny  $X_i$  musíme posoudit, jakého druhu je její nejistota, konkrétně zda se jedná o **nejistotu typu A** nebo o **nejistotu typu B**. Správnější je říci, že musíme posoudit, zda budeme nejistotu vyhodnocovat způsobem A (Type A evaluation) nebo způsobem B (Type B evaluation) nebo kombinovaně. Ale v textu tohoto doporučení budeme používat běžně zavedené pojmy nejistota typu A a nejistota typu B, s vědomím toho, že jde o způsob vyhodnocení (A nebo B).

#### 3.1.1 Nejistota typu A

Nejistotu typu A stanovujeme pro ty vstupní veličiny  $X_i$ , u kterých máme k dispozici hodnoty z opakovaných měření této veličiny. Pokud je měření veličiny  $X_i$  prováděno s dostatečným rozlišením (tedy na dostatečný počet platných míst), pak při opakovaných měřeních pozorujeme rozptýl naměřených hodnot  $x_j$ .

Označme  $x_{i,j}$  hodnotu veličiny  $X_i$  získanou při  $j$ -tém měření ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Jestliže rozdělení naměřených hodnot  $x_{i,j}$  kvalitativně odpovídá některému z obvyklých symetrických pravděpodobnostních rozdělení (normální, rovnoměrné, trojúhelníkové apod.), pak za často používaný odhad hodnoty veličiny  $X_i$  považujeme aritmetický průměr  $\bar{x}_i$  spočtený ze všech měřených hodnot:

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{i,j} . \quad (2)$$

Označme nyní na chvíli měřenou veličinu  $X_i$  jako  $Q$ , abychom se v textu nejbližší následujících odstavců vyhnuli dvojímu indexování. Odhad  $\bar{q}$  hodnoty veličiny  $Q$  spočtený z  $n$  nezávislých pozorování ( $n > 1$ ) je roven aritmetickému průměru hodnot  $q_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ):

$$\bar{q} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n q_j . \quad (3)$$

V klinické dozimetrii lze obvykle předpokládat, že pravděpodobnostní rozdělení hodnot veličiny  $X_i$  se blíží normálnímu (Gaussovu) rozdělení. Často používaným odhadem standardní nejistoty  $u_A(\bar{q})$  odhadu  $\bar{q}$  je v takovém případě **výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru**, kterou spočteme ze vztahu

$$u_A(\bar{q}) = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n (q_j - \bar{q})^2} . \quad (4)$$

Tento odhad není obecně nestranným odhadem (tj. střední hodnota odhadu je různá od odhadovaného parametru). Vychýlení je závislé na počtu měření  $n$  a také na rozdělení veličin  $X_i$ . V případě normálního rozdělení lze odhad  $u_A(\bar{q})$  vynásobit faktorem  $\frac{\sqrt{n-1}\Gamma((n-1)/2)}{\sqrt{2}\Gamma(n/2)}$ , aby byl odhad nestranný.  $\Gamma$  značí gama funkci. Hodnoty opravného faktoru jsou uvedeny v Tabulce č. 1. Tyto hodnoty opravného faktoru jsou platné pouze pro normálně rozdělené veličiny. Pokud mají veličiny jiné rozdělení, je nutné hodnotu opravného faktoru určit individuálně (analyticky nebo MC simulací). S takto korigovanou hodnotou dílčí nejistoty  $u_A(\bar{q})$  pak dále pracujeme, jako by se jednalo o standardní nejistotu, tedy ji například kvadraticky sčítáme s ostatními dílčími standardními nejistotami. A následně pak můžeme získanou standardní nejistotu výstupní veličiny rozšířit vynásobením např.  $k = 2$ , pro případ normálního rozdělení, pro pokrytí 95 %.

Tabulka č. 1: Hodnoty opravného faktoru  $k_A$  pro veličiny s normálním rozdělením a počet měření  $n$  menší než 10

| $n$   | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $k_A$ | 1,25 | 1,13 | 1,09 | 1,06 | 1,05 | 1,04 | 1,04 | 1,03 | 1,03 |

*Poznámka:*

**Pozor!** Tato tabulka je jiná, než byla tabulka v původním Doporučení SÚJB: Vyjádření a používání nejistot v klinické dozimetrii z roku 2016!

Odhad nejistoty je také zatížen nejistotou. Proto by měl být získán z největšího možného realizovatelného počtu měření. Hlavně, pokud je rozptyl měřených hodnot relativně velký. Nedoporučuje se, ani v případě nízkého rozptylu měřených hodnot, odhadovat nejistotu z méně než 3 hodnot.

*Poznámka 1: Důležitý je účel měření. Pokud je cílem měření stanovit nejistotu aritmetického průměru, tj. výběrovou směrodatnou odchylku aritmetického průměru, je vhodné udělat více měření, abychom nemuseli použít opravný faktor  $k_A$ . Pokud jsme nejistotu aritmetického průměru určili již dříve, a při aktuálním měření je cílem měření pouze stanovení aritmetického průměru (např. při kontrole stálosti veličiny), postačí méně měření (se zohledněním zkušeností s měřením konkrétní veličiny na daném zařízení).*

*Poznámka 2: V praxi se někdy může přihodit, že všechny hodnoty  $M_i$  indikované nějakým měřidlem jsou si rovny. Znamená to, že rozlišení měřidla není dostatečné k tomu, aby nám poskytlo informaci o pravděpodobnostním rozdělení hodnot měřené veličiny. V takovém případě bychom měli přejít na nižší měřicí rozsah nebo použít měřidlo s lepším rozlišením. Není-li to z nějakého důvodu možné, spočteme standardní nejistotu typu B  $u_B(M)$  ze vztahu ( 6 ), do kterého coby rozdíl horního a dolního limitu ( $a_+$  -  $a_-$ ) dosadíme jedničku na posledním místě, které měřidlo indikuje.*

Při praktických výpočtech je vždy třeba pečlivě rozlišovat mezi *výběrovou směrodatnou odchylkou souboru* a *výběrovou směrodatnou odchylkou aritmetického průměru*. Výběrová směrodatná odchylka souboru je mírou rozptylu jednotlivých změřených hodnot měřené veličiny. Je určena šířkou náhodného rozdělení, z něhož měřené hodnoty pocházejí. Jedná se tedy o vlastnost konkrétního náhodného pravděpodobnostního rozdělení, kterou nemůžeme ovlivnit (zmenšit) zvýšením počtu provedených měření. **Výběrovou směrodatnou odchylku souboru** spočteme ze vztahu

$$s(q_j) = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{j=1}^n (q_j - \bar{q})^2} . \quad (5)$$

Výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru určená vztahem ( 4 ) je pak mírou toho, s jakou nejistotou známe střední hodnotu onoho náhodného rozdělení. Je nepřímo úměrná odmocnině z počtu provedených měření, v principu je tedy možné ji libovolně zmenšovat zvyšováním počtu měření. Nejsme-li si někdy jisti, která z veličin ( 4 ) a ( 5 ) se skrývá za konkrétní statistickou funkcí v nějakém softwarovém produktu, je třeba porovnat výstup dané funkce s vlastním výpočtem pro nějakou triviální simulovanou sadu naměřených hodnot. Například pro „změřené“ hodnoty {1;2;3;4;5} udává vztah ( 4 ) výsledek přibližně 0,71, zatímco vztah ( 5 ) přibližně 1,58. Jednoduchým srovnáním tak zjistíme, že například funkce **smodch.výběr( )** v české lokalizaci tabulkového kalkulátoru MS Excel vrací hodnotu výběrové směrodatné odchylky souboru, tedy hodnotu podle vztahu ( 5 ).

### 3.1.2 Nejistota typu B

O nejistotě typu B hovoříme, jestliže její velikost stanovujeme jiným způsobem než statistickou analýzou série pozorování. Příkladem jsou nejistoty kalibračních koeficientů stanovené při kalibracích měřidel, nejistoty vyplývající z principu použitých metod měření, nejistoty vznikající v důsledku konečného rozlišení digitálních měřidel apod. Příslušná standardní nejistota  $u_B(x_i)$  je pak určena odborným úsudkem na základě dostupných informací o variabilitě veličiny  $X_i$ . Velikost standardní nejistoty typu B může být pro konkrétní měřicí postup spočtena předem.

Pokud je pro veličinu  $X_i$  známá pouze jedna hodnota, jako např. jedna naměřená hodnota, výsledná hodnota z předchozích měření, referenční hodnota z literatury apod., použije se tato hodnota jako nejlepší odhad hodnoty  $x_i$  veličiny  $X_i$ . Standardní nejistota  $u_B(x_i)$  náležící k této hodnotě  $x_i$  musí být převzata ze stejného zdroje.

Stává se, že pro hodnoty vstupní veličiny  $X_i$  známe pouze horní limit  $a_+$  a dolní limit  $a_-$ . Nemáme-li žádné další informace o pravděpodobnostním rozdělení hodnot této vstupní veličiny a zároveň

předpokládáme, že výskyt všech hodnot v intervalu je stejně pravděpodobný (např. chyba zaokrouhlování), měl by se použít předpoklad o rovnoměrném rozdělení hodnot v intervalu  $\langle a_-; a_+ \rangle$ . Nejlepším odhadem hodnoty je pak aritmetický průměr horního a dolního limitu, **nejlepší odhad standardní nejistoty** je dán vztahem

$$u_B = \sqrt{\frac{1}{12} \cdot (a_+ - a_-)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{(a_- - a_+)}{2}. \quad (6)$$

### 3.1.3 Výpočet kombinované standardní nejistoty jedné vstupní veličiny

Kombinovaná standardní nejistota  $u(x_i)$ , někdy též značená  $u_c(x_i)$ , spojená s hodnotou  $x_i$  vstupní veličiny  $X_i$  je rovna kvadratickému součtu standardní nejistoty typu A a standardní nejistoty typu B:

$$u(x_i) = \sqrt{u_A^2(x_i) + u_B^2(x_i)}. \quad (7)$$

### 3.1.4 Výpočet nejistoty při interpolaci mezi hodnotami se známou nejistotou

V praxi se poměrně často můžeme setkat se situací, kdy hodnota některé vstupní veličiny a její nejistota je změřena pouze v určitých bodech a my při dalším využití těchto naměřených hodnot mezi nimi interpolujeme. Příkladem takovéto situace je výpočet kermového kalibračního koeficientu ionizační komory pro záření nuklidu  $^{192}\text{Ir}$ , který je použit v našem Příkladu č. 2. Popíšeme zde nyní postup pro určení nejistoty takovéto interpolované hodnoty.

Mějme nezávisle proměnnou  $Z$  a závisle proměnnou  $\Phi$ , která je funkcí proměnné  $Z$ . Budeme předpokládat, že hodnoty  $z$  nezávisle proměnné  $Z$  známe s velmi malou nejistotou a že tuto nejistotu můžeme zanedbat. Předpokládejme dále, že pro hodnoty nezávisle proměnné  $z_1$  a  $z_2$  známe výsledky měření proměnné  $\Phi$ , jejichž hodnoty jsou  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$  a jejichž nejistoty jsou  $u_{\varphi_1}$  a  $u_{\varphi_2}$ . Nyní chceme interpolací získat hodnotu  $\varphi_{int}$  závisle proměnné  $\Phi$  v bodě  $z_{int}$  a nejistotu  $u_{\varphi,int}$  této hodnoty.

Jeden z možných postupů pro výpočet nejistoty interpolované hodnoty je založen na využití vlastností Lagrangeových interpolačních polynomů. Obecně je tento postup popsán například v článku [5]. My si zde ukážeme pouze jeho nejjednodušší případ, tedy užití lineární interpolace.

Namísto běžného vyjádření vztahu pro lineární interpolaci

$$\varphi_{int} = \varphi_1 + (z_{int} - z_1) \cdot \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)}{(z_2 - z_1)} \quad (8)$$

použijeme algebraicky ekvivalentní zápis

$$\varphi_{int} = L_1(z_{int}) \cdot \varphi_1 + L_2(z_{int}) \cdot \varphi_2, \quad (9)$$

kde  $L_1(z)$  a  $L_2(z)$  jsou Langrangeovy interpolační polynomy prvního stupně:

$$L_1(z) = \frac{z - z_2}{z_1 - z_2}, \quad L_2(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \quad (10)$$

Přesný postup výpočtu nejistoty  $u_{\varphi,int}$  interpolované hodnoty  $\varphi_{int}$  závisí na tom, nakolik jsou korelovány výsledky měření v bodech  $z_1$  a  $z_2$ . Pro mezní případy, kdy tato dvě měření jsou zcela nezávislá nebo naopak plně korelovaná, je možno vyjádřit nejistotu interpolované hodnoty jednoduchými vztahy.

Jestliže jsou měření v bodech  $z_1$  a  $z_2$  silně korelovaná, platí pro nejistotu  $u_{\varphi,int}$  vztah

$$u_{\varphi,int} = L_1(z_{int}) \cdot u_{\varphi_1} + L_2(z_{int}) \cdot u_{\varphi_2} \quad (11)$$

Jelikož vztah (11) má stejný tvar jako vztah (9), znamená to, že velikost nejistoty  $u_{\varphi}$  je lineárně interpolována mezi svými krajními hodnotami, stejně jako je lineárně interpolována hodnota  $\varphi$  závisle proměnné  $\Phi$ .

Jestliže naopak můžeme považovat měření v bodech  $z_1$  a  $z_2$  za nezávislá, bude pro nejistotu  $u_{\varphi,int}$  interpolované hodnoty  $\varphi_{int}$  platit vztah

$$u_{\varphi,int} = \sqrt{[L_1(z_{int}) \cdot u_{\varphi_1}]^2 + [L_2(z_{int}) \cdot u_{\varphi_2}]^2} \quad (12)$$

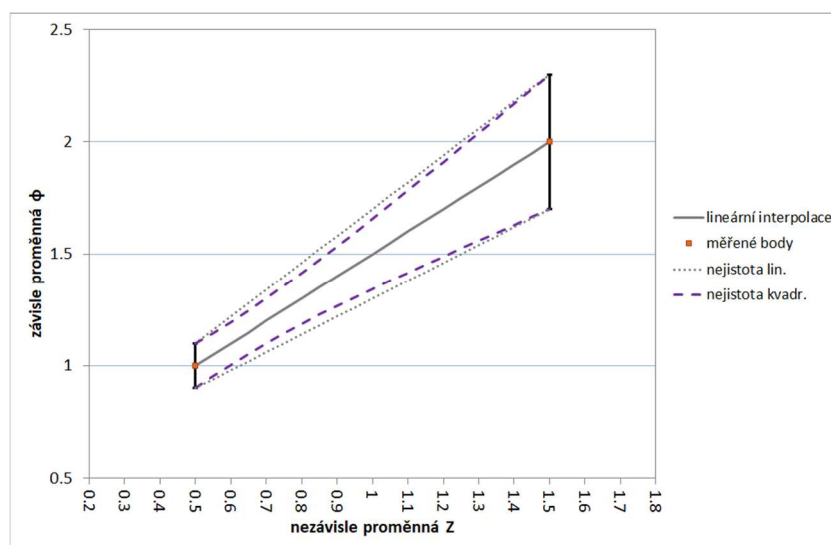
V tomto případě je nejistota interpolované hodnoty rovna druhé odmocnině z váženého součtu druhých mocnin nejistot v krajních bodech, kdy v roli vah vystupují druhé mocniny Lagrangeových interpolačních polynomů.

První krajní případ, tedy silná korelace, nastává například tehdy, kdy hodnotu kalibračního koeficientu pro určitou kvalitu svazku záření interpolujeme mezi hodnotami kalibračních koeficientů, které jsou uvedeny na jednom kalibračním listu a pocházejí z téže kalibrace.

Opačný krajní případ, tedy zanedbatelná korelace mezi hodnotami měření v bodech  $z_1$  a  $z_2$ , by nastal, kdybychom například interpolovali mezi dvěma hodnotami, z nichž každá byla získána v jiné době a v jiné kalibrační laboratoři. S ohledem na vzájemnou provázanost všech dozimetrických kalibračních laboratoří a jejich navázání na stejné primární etalony sice ani v tomto případě nemůžeme hovořit o úplné nezávislosti, ale v dobrém přiblížení můžeme považovat předpoklad o nezávislosti za splněný.

Následující obrázek ilustruje průběh interpolované nejistoty spočtené podle vztahů ( 11 ) a ( 12 ) pro následující hodnoty:  $z_1 = 0,5$ ;  $\varphi_1 = 1,0$ ;  $u_{\varphi_1} = 0,1$ ;  $z_2 = 1,5$ ;  $\varphi_2 = 2,0$ ;  $u_{\varphi_2} = 0,2$ . Prostřední plná čára je lineární interpolací měřených hodnot proměnné  $\Phi$ . Tečkované čáry odpovídají nejistotě interpolované podle vztahu ( 11 ), tedy situaci, kdy měření v bodech  $z_1$  a  $z_2$  jsou silně korelovaná (lineární vztah). Čárkované křivky jsou spočteny podle vztahu ( 12 ), tedy pro případ interpolace mezi nekorelovanými hodnotami (kvadratický vztah).

Obrázek č. 1: Ilustrace průběhu nejistoty interpolované hodnoty pro dva mezní případy



### 3.2 Stanovení hodnoty výstupní měřené veličiny Y

Každé veličině  $X_i$  přiřadíme pravděpodobnou hodnotu této veličiny  $x_i$  (v příslušných jednotkách) a odhad standardní nejistoty  $u(x_i)$ . Naměřenou hodnotu  $y$  měřené veličiny  $Y$  získáme dosazením hodnot  $x_i$  vstupních veličin  $X_i$  do konkrétní podoby vztahu ( 1 ).

### 3.3 Stanovení nejistoty hodnoty výstupní měřené veličiny Y

#### 3.3.1 Výpočet koeficientů citlivosti $c_i$

**Koeficient citlivosti**  $c_i$  popisuje, do jaké míry je naměřená hodnota  $y$  výstupní veličiny Y ovlivňována malými změnami v hodnotě  $x_i$  veličiny  $X_i$ . Číselná hodnota koeficientu citlivosti je rovna hodnotě parciální derivace funkce ( 1 ) podle proměnné  $X_i$  v bodě  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ :

$$c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \left. \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|_{X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_N=x_N} \quad (13)$$

Hodnota koeficientu citlivosti může být stanovena buď výpočtem ze vztahu ( 13 ) nebo numericky, tj. výpočtem změny hodnoty  $y$  výstupní veličiny Y při malé změně hodnoty  $x_i$  veličiny  $X_i$ . Zde je nutné si uvědomit, že jednotka koeficientu citlivosti  $c_i$  není shodná s jednotkou původní veličiny  $f$ , ale rovná se jednotce  $f$  lomeno jednotkou  $x_i$ . Např. pro  $f(x) = e^x$  s jednotkou [U], derivace  $f'(x) = e^x$  má jednotku [U/w], kde [w] je jednotka  $x$ .

#### 3.3.2 Výpočet standardní nejistoty měření pro případ nekorelovaných vstupních veličin

Je-li možno považovat všechny vstupní a ovlivňující veličiny  $X_i$  za vzájemně nekorelované nebo je-li možno pro dané měření jejich korelaci zanedbat, je druhá mocnina standardní nejistoty  $u(y)$  naměřené hodnoty  $y$  výstupní veličiny Y dána vztahem

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^N u_i^2(y), \quad (14)$$

kde veličina  $u_i(y)$  je příspěvkem ke standardní nejistotě  $u(y)$  naměřené hodnoty  $y$  výstupní veličiny Y vyplývající ze standardní nejistoty  $u(x_i)$  veličiny  $X_i$ . Přitom platí

$$u_i(y) = c_i \cdot u(x_i), \quad (15)$$

kde  $c_i$  je koeficient citlivosti přiřazený k hodnotě  $x_i$  veličiny  $X_i$ . Nezáleží na tom, zda dílčí nejistoty  $u_i(y)$  jsou spočteny z nejistot  $u(x_i)$  typu A nebo typu B. Způsob, jakým se zde s nimi pracuje, je stejný. Důležité ovšem je, aby do vztahu vstupovaly pouze standardní nejistoty (viz kapitola 3.1.1 a 3.1.2).

V praxi se často setkáváme se dvěma jednoduchými případy tvaru funkční závislosti ( 1 ), pro něž se výpočet standardní nejistoty měření dá zjednodušit.

Pokud je funkce ( 1 ) vyjádřena ve tvaru **lineární kombinace vstupních veličin**  $X_i$ , tj. pokud

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N) = \sum_{i=1}^N p_i X_i, \quad (16)$$

kde  $p_i$  jsou konstanty, pak hodnoty koeficientů citlivosti  $c_i$  jsou rovny hodnotám  $p_i$  a vztah ( 14 ) přechází na tvar

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^N p_i^2 u^2(x_i). \quad (17)$$

Je-li funkce ( 1 ) vyjádřena jako **součin nebo podíl vstupních veličin**  $X_i$  umocněných na  $p_i$ , tj. platí-li

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N) = k \prod_{i=1}^N X_i^{p_i}, \quad (18)$$

kde  $k$  je konstanta, pak koeficienty citlivosti jsou rovny pro  $X_i$  ( $i = 1 \dots N$ )

$$c_i = \frac{\partial k \prod_{i=1}^N x_i^{p_i}}{\partial x_i} = k \cdot \prod_{l \neq i} x_l^{p_l} \cdot \frac{\partial x_i^{p_i}}{\partial x_i} = k \cdot \prod_{l \neq i} x_l^{p_l} \cdot p_i \cdot x_i^{p_i-1} = p_i y / x_i$$

a je vhodné přejít k relativním standardním nejistotám  $w(x_i)$ :

$$w(y) = u(y)/|y|, \quad w(x_i) = u(x_i)/|x_i|, \quad (19)$$

protože potom vztah ( 14 ) přechází na vztah ( 20 ), kde pro relativní standardní nejistotu  $w(y)$  naměřené hodnoty  $y$  výstupní veličiny Y platí

$$w^2(y) = \sum_{i=1}^N p_i^2 w^2(x_i). \quad (20)$$

### 3.3.3 Výpočet standardní nejistoty měření pro případ korelovaných vstupních veličin

Není-li možno zanedbat korelace mezi vstupními veličinami, musíme použít obecnější formu vztahu ( 14 ), a to:

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^N u_i^2(y) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N u_i(y) \cdot u_j(y) \cdot r_{ij} \quad (21)$$

kde veličina  $u_i(y)$  má stejný význam jako ve vztazích ( 14 ) a ( 15 ), a  $r_{ij}$  je hodnota **korelačního koeficientu**. Nabývá hodnoty mezi -1 a 1. Hodnotu korelačního koeficientu mezi  $i$ -tou a  $j$ -tou veličinou můžeme určit analýzou souboru měřených dvojic hodnot  $(x_{ik}, x_{jk})$ , kde  $k = 1, \dots, n$ , máme-li takový soubor dat k dispozici. Nebo může být odvozena z pravděpodobnostního modelu, který popisuje vztah daných veličin.

### 3.4 Postup pro stanovení hodnoty výstupní měřené veličiny a její nejistoty - shrnutí

(modifikováno podle [4])

Postup má následující kroky:

- (i) **model měření, možné korelace vstupních veličin**
- (ii) **zdroje a typy nejistot, vyčíslení hodnot vstupních veličin a jejich nejistot**
- (iii) **stanovení hodnoty výstupní měřené veličiny**
- (iv) **stanovení standardní nejistoty hodnoty výstupní měřené veličiny**
- (v) **stanovení rozšířené nejistoty hodnoty výstupní měřené veličiny**
- (vi) **uvedení výsledku měření**

#### (i) model měření, možné korelace vstupních veličin

Matematicky vyjádřete závislost měřené veličiny (výstupní veličiny)  $Y$  na vstupních a ovlivňujících veličinách  $X_i$  v explicitním tvaru ( 1 ) – vzorec pro výpočet výstupní veličiny. Identifikujte případné vzájemné korelace vstupních veličin.

#### (ii) zdroje a typy nejistot, vyčíslení hodnot vstupních veličin a jejich nejistot

U vstupních veličin, pro které je pravděpodobnostní rozdělení jejich hodnot známé nebo lze předpokládat, stanovte očekávanou hodnotu veličiny a její standardní nejistotu typu A. Pro ty veličiny  $X_i$ , pro něž je známa pouze jedna hodnota (např. výsledky předchozích měření, opravné hodnoty, kalibrační koeficienty, hodnoty převzaté z literatury apod.), stanovte hodnotu standardní nejistoty typu B. Shrňte výsledky v podobě přehledu očekávaných hodnot a standardních nejistot vstupních a ovlivňujících veličin, viz Tabulka č. 2.

#### (iii) stanovení hodnoty výstupní měřené veličiny

Dosažením očekávaných hodnot vstupních veličin  $x_i$  do konkrétní podoby vztahu ( 1 ) spočtete naměřenou hodnotu  $y$  výstupní měřené veličiny  $Y$ .

#### (iv) stanovení standardní nejistoty hodnoty výstupní měřené veličiny

- a) Má-li rovnice modelu měření tvar ( 16 ) nebo ( 18 ) a mohou-li se zanedbat korelace mezi vstupními veličinami, spočtete standardní nejistotu  $u(y)$  hodnoty  $y$  výstupní měřené veličiny podle vztahu ( 17 ) nebo ( 19 – 20 ). Jsou-li vstupní veličiny korelované, postupujte v souladu s kapitolou 3.3.3 a pro výpočet nejistoty měření využijte obecný vztah ( 21 ).
- b) Má-li rovnice modelu měření jiný tvar než ( 16 ) nebo ( 18 ), spočtete koeficienty citlivosti podle vztahu ( 13 ). Pro každou vstupní veličinu  $X_i$  vypočtete pomocí vztahu ( 15 ) její příspěvek  $u_i(y)$  k nejistotě hodnoty výstupní měřené veličiny. Je-li možné zanedbat vzájemné korelace mezi vstupními veličinami, postupujte podle kapitoly 3.3.2 a druhou mocninu standardní nejistoty  $u(y)$  stanovte jako součet druhých mocnin příspěvků od jednotlivých vstupních veličin podle vztahu ( 14 ). Pokud víte, že vstupní veličiny jsou korelované, postupujte v souladu s kapitolou 3.3.3 a pro výpočet nejistoty měření využijte obecný vztah ( 21 ).

#### (v) stanovení rozšířené nejistoty hodnoty výstupní měřené veličiny

Vypočtete rozšířenou nejistotu  $U(y)$  vynásobením standardní nejistoty  $u(y)$  naměřené hodnoty výstupní veličiny příslušným koeficientem rozšíření  $k$ .

(vi) **uvedení výsledku měření**

Uveďte výsledek měření zahrnující naměřenou hodnotu  $y$  měřené veličiny, jemu příslušející rozšířenou nejistotu  $U(y)$  a koeficient rozšíření  $k$ . Výsledek měření je možno zapsat různými způsoby, vždy však musí být ze zápisu jednoznačně zřejmé, jaká je naměřená hodnota, jaká je nejistota měření a k jaké pravděpodobnosti pokrytí se udaná nejistota vztahuje.

Tabulka č. 2: Schéma uspořádání veličin, odhadů, standardních nejistot, koeficientů citlivosti a příspěvků k nejistotě v rámci analýzy nejistot měření

| Veličina | Hodnota (odhad) | Standardní nejistota | Pravděpodobnostní rozdělení | Koeficient citlivosti | Příspěvek ke standardní nejistotě |
|----------|-----------------|----------------------|-----------------------------|-----------------------|-----------------------------------|
| $X_i$    | $x_i$           | $u(x_i)$             |                             | $c_i$                 | $u_i(y)$<br>$= c_i \cdot u(x_i)$  |
| $X_1$    | $x_1$           | $u(x_1)$             | Pravděp. rozdělení 1        | $c_1$                 | $u_1(y)$                          |
| $X_2$    | $x_2$           | $u(x_2)$             | Pravděp. rozdělení 2        | $c_2$                 | $u_2(y)$                          |
|          |                 |                      |                             |                       |                                   |
| $X_N$    | $x_N$           | $u(x_N)$             | Pravděp. rozdělení N        | $c_N$                 | $u_N(y)$                          |
| $Y$      | $y$             |                      |                             |                       | $u(y)$                            |

V Tabulce č. 2 i v textu doporučení značí  $x_i$  odhady hodnot vstupních veličin;  $y$  odhad hodnoty výstupní veličiny;  $u(x_i)$  standardní nejistoty hodnot vstupních veličin nebo jejich odhady;  $c_i$  koeficienty citlivosti vstupních veličin;  $u_i(y)$  příspěvky vstupních veličin ke standardní nejistotě;  $u(y)$  odhad standardní nejistoty výstupní měřené veličiny.

### 3.5 Základní vztahy pro výpočet standardní nejistoty měření - přehledná tabulka

Tabulka č. 3: Výpočet standardní nejistoty pro některé jednoduché modelové funkce

|   |              | Modelová funkce $f$                              | Vztah pro výpočet standardní nejistoty měření   |
|---|--------------|--|---|
| 1 | bez korelací | $y = x_1 + x_2$                                  | $u^2(y) = u^2(x_1) + u^2(x_2)$  |
| 2 |              | $y = x_1 - x_2$                                  |   |
| 3 |              | $y(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N p_i x_i$ | $u^2(y) = \sum_{i=1}^N p_i^2 u^2(x_i)$  |
| 4 |              | $y = x_1 \cdot x_2$                              | $w^2(y) = w^2(x_1) + w^2(x_2)$  |
| 5 |              | $y = x_1/x_2$                                    |   |
| 6 |              | $y(x_1, x_2, \dots, x_N) = k \prod_i x_i^{p_i}$  | $w^2(y) = \sum_{i=1}^N p_i^2 w^2(x_i)$  |
| 7 |              | $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$                    | $u^2(y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i)$  |
| 8 | s korelacemi | $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$                    | $u^2(y) = \sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N c_i c_j u(x_i) \cdot u(x_j) \cdot r_{ij}$ |

V případech uvedených v tabulce na řádcích č. 1 až č. 7 platí vztah v pravém sloupci tabulky pouze za předpokladu, že můžeme zanedbat korelace mezi vstupními veličinami. Není-li možno zanedbat korelace, musíme postupovat podle obecného vztahu na řádce č. 8.



## 4. Stanovení standardní nejistoty v klinické dozimetrii – v radioterapii

### 4.1 Nejistoty hodnot vstupních veličin

Kategorizace nejistot hodnot vstupních a ovlivňujících veličin pro jednotlivé druhy záření by měla vycházet z příslušných tabulek v doporučení TRS 398 a TRS 483. Relativní standardní nejistota dávky (Combined standard uncertainty of  $D_w$ ) uváděná v tabulkách TRS 398 se skládá z relativní standardní nejistoty dávkového kalibračního koeficientu referenčního dozimetrického řetězce uživatele (Combined uncertainty of step 1) a z relativní standardní nejistoty měření v uživatelově svazku (Combined standard uncertainty of step 2), která zahrnuje typické hodnoty nejistot pro dlouhodobou stálost uživatele referenčního dozimetrického řetězce, stanovení referenčních podmínek, odečet elektrometru vůči časovači nebo monitorovací komoře, korekci na ovlivňující veličiny a korekci na kvalitu záření.

*Ovlivňující veličiny jsou definovány jako veličiny, které nejsou předmětem měření, ale ovlivňují měřenou veličinu. Mohou být různého charakteru, např. tlak, teplota, vlhkost, korekce na polaritu, mohou být spojené s elektrometrem (stárnutí, drift nuly, zahřívání), s radiačním polem (např. kvalita svazku, dávkový příkon, velikost pole, hloubka ve fantomu). V brachyterapii dále gradient komory, zeslabení vzduchem, rozptýlené záření, tranzitní čas. Buď na ně je provedena korekce, nebo na ně není provedena korekce, ale v každém případě s sebou nesou nejistotu (nejistotu spojenou s jejich zanedbáním nebo nejistotu hodnoty příslušného opravného faktoru).*

*Referenční podmínky jsou popsány souborem hodnot ovlivňujících veličin, pro které je kalibrační koeficient platný bez dalších korekčních faktorů. Referenční podmínky pro kalibrace z hlediska absorbované dávky ve vodě jsou např. geometrické uspořádání (vzdálenost a hloubka), velikost pole, materiál a rozměry fantomu, teplota, tlak a relativní vlhkost vzduchu.*

Většinu hodnot nejistot vstupních a ovlivňujících veličin uvedených v tabulkách v TRS 398 (Step 2) lze převzít za předpokladu dodržení všech podmínek pro stanovení dávky uvedených v TRS 398.

Vždy je ale nutné uvažovat vlastní hodnotu nejistoty dávkového kalibračního koeficientu ionizační komory/detektoru (Step 1). A je také vhodné uvažovat vlastní hodnotu nejistoty dlouhodobé stálosti uživatele referenčního dozimetrického řetězce. Při stanovování dozimetrických veličin a jejich nejistot je vždy nutné dobře znát referenční podmínky a ovlivňující veličiny uvedené v kalibračních listech. A je nutné zohlednit tyto skutečnosti jak při stanovování dozimetrických veličin, tak při vyjadřování jejich nejistot. Týká se to např. geometrie při kalibraci (velikost pole, SSD, hloubka ve fantomu), zahrnutí/nezahrnutí saturačního a polaritního opravného faktoru do kalibračního koeficientu ionizační komory atd. V případě, že se podmínky při kalibraci a při měření v uživatelově svazku odlišují, je nutné to správným způsobem zohlednit (viz např. TRS 398, kapitola 4.4.3.3. polaritní efekt) a v případě potřeby navýšit nejistotu stanovené dozimetrické veličiny.

Tabulky nejistot uváděné v TRS 398 neuvádějí explicitně nejistoty typu A z opakovaných měření. Tyto nejistoty si uživatel může zahrnout sám. To může být užitečné např. u rentgenových svazků nízkých a středních energií, kde se výstup záření může měnit v čase v závislosti na napětí, teplotě rentgenky, konstantnosti hodnoty proudu a napětí. U urychlovačů jsou změny výstupu záření v čase obvykle minimální, a proto stanovená standardní nejistota typu A vstupní veličiny M (odezva elektrometru) je malá ve srovnání s nejistotami ostatních vstupních a ovlivňujících veličin, obvykle typu B, a jen minimálně tak ovlivní standardní nejistotu hodnoty dávky.

Pokud se namísto tabelovaných hodnot korekcí na kvalitu záření  $k_{Q,Q_0}$  používají měřené hodnoty, relativní standardní nejistota hodnoty absorbované dávky ve vodě může být snížena, neboť nejistota změřené hodnoty  $k_{Q,Q_0}$  je nižší než nejistota tabelované hodnoty.

Pokud se pro měření ve svazku použije pracovní měřidlo, jehož dávkový kalibrační koeficient byl stanoven křížovou kalibrací v uživatelově svazku oproti kalibrovanému referenčnímu elektrometru, nejistota se navyšuje o další přidaný krok (step) – křížovou kalibraci (zhruba o 0,2 %).

Hodnoty nejistot závisejí také na typu použité komory (cylindrická, planparalelní), na úrovni standardizační laboratoře (primární, sekundární), na způsobu kalibrace referenční komory: zda byla kalibrována v kobaltovém svazku, nebo v příslušných svazcích fotonových (vysokoenergetických, středních energií, nízkých energií), elektronových, protonových, nebo křížovou kalibrací v elektronovém svazku (pro stanovení dávky v elektronových svazcích). Promítá se to zejména do nejistoty korekce na kvalitu záření  $k_{Q,Q_0}$ . Podrobnosti viz TRS 398, *Appendix B: Calculation of  $k_{Q,Q_0}$  and its uncertainty* [1] a TRS 483, *Appendix I: Determination of beam quality correction factors for reference dosimetry and their uncertainty estimates* [16].

#### 4.2 Nejistota dávky v elektronových svazcích při použití křížově kalibrované planparalelní ionizační komory

Speciální pozornost zasluhuje nejistota stanovení dávky planparalelní ionizační komorou (pp IK) křížově kalibrovanou v elektronovém svazku oproti cylindrické komoře, která byla kalibrována v kobaltovém svazku. Je třeba vycházet ze vztahu (7.13) TRS 398 pro stanovení dávky, kde se některé parametry pokrátí (oproti plnému vyjádření), a tudíž i vyjádření nejistot pak vede k menší celkové hodnotě nejistoty, než by tomu bylo při stanovení dávky pp IK kalibrovanou v kobaltovém svazku. Velmi záleží na vyjádření nejistoty kalibračního koeficientu pp IK z křížové kalibrace, která je uvedena v kalibračním listě. Křížovou kalibraci si může pracoviště provést samo nebo ji může provést jiný subjekt, např. SÚRO.

Pokud se použije kalibrační koeficient pp IK z křížové kalibrace stanovený dle metodiky SÚRO, pak se celková nejistota stanovení dávky touto komorou skládá

- z nejistoty měření v uživatelově svazku (zhruba 1,1 % - viz tab. 7.VII TRS 398: long term stability of user dosimeter, reference conditions, beam monitor, influence quantities),
- z nejistoty dávkového kalibračního koeficientu pp IK z křížové kalibrace (1,45 % - Protokol SÚRO o křížové kalibraci) a
- z nejistoty poměru perturbačních faktorů pro pp IK pro kvalitu kalibračního svazku (cross) a kvalitu uživatelova svazku (Q) - 0,4%. Vyplyvá to ze vztahu 7.13 v TRS 398 a z informací uvedených k Protokolu SÚRO o křížové kalibraci.

Výsledná nejistota (zhruba 1,9 %) je o něco vyšší než nejistota uváděná v tomto případě v TRS 398, protože křížovou kalibraci prováděl jiný subjekt než ten, který měří v uživatelově svazku.

Pokud se použije kalibrační koeficient pp IK z křížové kalibrace stanovený přímo pracovištěm, vyjádří se nejistota s užitím komentáře pod vztahem (7.13) TRS 398. Výsledná nejistota bude zhruba 1,6 % (za předpokladu, že nejistota dávkového kalibračního faktoru cylindrické ionizační komory v kobaltu je 0,6 %).

#### 4.3 Rentgenové svazky nízkých a středních energií

Pro rentgenové svazky nízkých a středních energií se doporučuje rekalibrovat ionizační komoru jednou za šest let ve všech kvalitách svazku (nikoliv jen v referenční kvalitě  $Q_0$ ), protože ionizační komory jsou pro tyto kvality svazků náchylné na změnu energetické odezvy. Kdyby se to neprovedlo, musela by se navýšit nejistota stanovení dávky (se zohledněním rozdílu nového dávkového kalibračního koeficientu od předchozího a nejistot jejich stanovení). Ionizační komory používané pro stanovení kvality rentgenových svazků nízkých i středních energií (první polotloušťky) by měly mít energetickou závislost v používaném rozsahu menší než 2 %. Tyto komory by měly být kalibrovány ve svazcích obdobného spektra jako je klinické spektrum a za obdobných referenčních podmínek jako jsou podmínky při klinickém použití. Snižuje se tím nejistota stanovení dávky.

Pokud je ionizační komora kalibrovaná v rentgenových svazcích středních energií v hloubce 5 cm a používá se tento dávkový kalibrační koeficient v referenční hloubce 2 cm, měl by se uvážit korekční faktor na změnu spektra mezi těmito hloubkami a jeho nejistota. Dle [32] pro rentgenové svazky středních energií (kvality TH100 – TH 280) pro komoru PTW 30013 je průměrná hodnota korekčního faktoru na změnu spektra přes uvedené kvality svazků v hloubce 5 cm oproti hloubce 2 cm rovna 1,0008; směrodatná odchylka této průměrné hodnoty je 0,0009. V rámci analýzy nejistot je tedy možné tuto nejistotu zanedbat.

#### 4.4 Nestandardní vysokoenergetická fotonová pole

Při stanovování nejistot dávky pro nestandardní vysokoenergetická fotonová pole (FFF svazky, CyberKnife, tomoterapeutické ozařovače, Leksellův gama nůž) se postupuje obdobně jako pro standardní pole (dle TRS 398), ale speciální pozornost musí být věnována nejistotě korekce na kvalitu záření, která se pro tyto svazky značí  $k_{Q_{msr}, Q_0}^{f_{msr}, f_{ref}}$ . Podrobnosti tohoto stanovení jsou uvedeny v TRS 483, Appendix I: *Determination of beam quality correction factors for reference dosimetry and their uncertainty estimates* [16]. Souhrnně lze říci, že relativní standardní nejistota korekcí na kvalitu záření pro FFF svazky (uvedená v tabulkách TRS 483), je číselně shodná s relativní standardní nejistotou korekcí na kvalitu záření pro WFF svazky (uvedenou v současných tabulkách TRS 398), a to 1 %.

Typické hodnoty relativní standardní nejistoty absorbované dávky za referenčních podmínek jsou uvedeny v následující tabulce. Shodují se s typickými hodnotami pro WFF svazky, vyjma pro Leksellův gama nůž, kde musela být přidána korekce na kvalitu záření (Machine specific reference field) (oproti tabulce 5.II v TRS 398).

Tabulka č. 4: Typické hodnoty relativní standardní nejistoty absorbované dávky pro vysokoenergetická fotonová pole (za předpokladu, že nejistota dávkového kalibračního faktoru cylindrické ionizační komory v  $^{60}\text{Co}$  je 0,6 %).

| Svazek/ozařovač           | Relativní standardní nejistota [%] |
|---------------------------|------------------------------------|
| $^{60}\text{Co}$          | 0,9                                |
| WFF svazky                | 1,5                                |
| FFF svazky                | 1,5                                |
| CyberKnife                | 1,5                                |
| Tomoterapeutický ozařovač | 1,5                                |
| Leksellův gama nůž        | 1,3                                |

*Poznámka k hodnotám nejistot uvedeným v TRS 398:*

*Doporučuje se sledovat aktualizace TRS 398, zejména vyčíslení nejistot korekčních faktorů na kvalitu záření, protože pro WFF svazky je hodnota 1 % pravděpodobně nadhodnocená [16].*

## 5. Stanovení standardní nejistoty v klinické dozimetrii – v radiodiagnostice

Kategorizace nejistot hodnot vstupních a ovlivňujících veličin by měla vycházet z příslušných tabulek v doporučení TRS 457 [6], v němž je uvedena tabulka pro vyjádření nejistot stanovení kerry ve vzduchu v SSDL a tabulky pro vyjádření nejistot v klinické praxi. Tyto tabulky jsou dále děleny na scénáře v závislosti na požadované přesnosti stanovení dané veličiny. Relativní standardní nejistota uváděná v tabulkách TRS 457 se skládá z relativní standardní nejistoty kermového kalibračního koeficientu referenčního dozimetrického řetězce uživatele a z relativní standardní nejistoty měření v uživatelově svazku. V tabulkách nejistot v TRS 457 je uváděna relativní standardní nejistota (Relative combined standard uncertainty) i relativní rozšířená nejistota (Relative expanded uncertainty); na rozdíl od TRS 398, kde je v tabulkách nejistot uváděna pouze relativní standardní nejistota (Combined standard uncertainty).

Pro ilustraci vyjádření nejistot pro různé scénáře měření je uvedena následující tabulka (viz Tabulka 8.2 v dokumentu IAEA TRS 457).

Tabulka č. 5: Příklad typických hodnot složek nejistoty pro veličiny přímo měřitelné v radiodiagnostice.

| Ovlivňující veličina                         | Relativní standardní nejistota [%] |            |            |
|--|------------------------------------|------------|------------|
|  | Scénář 1                           | Scénář 2   | Scénář 3   |
| Kermový kalibrační koeficient                | 2,89                               | 1,6        | 1,6        |
| Kvalita záření                               | 2,89                               | 1,5        | 0,5        |
| Kermový příkon                               | 1,15                               | 0,5        | 0,5        |
| Směr dopadajícího svazku                     | 1,73                               | 1,0        | 0,5        |
| Tlak vzduchu                                 | 1,15                               | 0,5        | 0,5        |
| Teplota a vlhkost                            | 1,73                               | 0,5        | 0,5        |
| Elektromagnetická kompatibilita              | 2,89                               | 1,5        | 1,0        |
| Velikost pole a homogenita pole              | 1,73                               | 1,0        | 1,0        |
| Napětí                                       | 1,15                               | 1,2        | 1,0        |
| Dlouhodobá stálost referenčního elektrometru | 1,15                               | 1,0        | 0,5        |
| <b>Relativní standardní nejistota</b>        | <b>6,3</b>                         | <b>3,5</b> | <b>2,7</b> |
| <b>Relativní rozšířená nejistota</b>         | <b>12,6</b>                        | <b>7,0</b> | <b>5,4</b> |

Konkrétní členění ovlivňujících veličin je tedy jiné než v TRS 398, ale ve výsledku se neliší.

**Scénář 1** splňuje požadavky IEC 61674 [21]. Jsou to minimální požadavky na provedení měření. Hodnota měřené veličiny se získá vynásobením odečtu dozimetru, korigovaného na normální tlak v dané nadmořské výšce a průměrnou teplotu v místnosti, kalibračním koeficientem. Žádné další korekce se neprovádějí.

**Scénář 2** popisuje případ, kdy je použit referenční dozimetr, kalibrovaný v SSDL (splňující požadavky IEC 61674 [21], tedy např. maximální energetickou závislost  $\pm 2,6$  %), provádí se korekce na aktuální tlak a teplotu.

**Scénář 3** popisuje případ, kdy je použit referenční dozimetr, kdy podmínky ozáření jsou kontrolovány (kvalita záření, směr záření, hustota vzduchu) a kdy je provedena korekce na příslušné ovlivňující veličiny (např. na kvalitu záření).

## 6. Příklady postupu pro stanovení hodnoty měřené veličiny a její nejistoty

Na vybraných příkladech dozimetrických měření budeme ilustrovat postup sestávající ze šesti postupných kroků, který je uveden v kapitole 3.4. Jednotlivé kroky budeme označovat postupně (i) až (vi) v souladu se značením v kapitole 3.4.

Tato publikace není primárně věnována konkrétnímu stanovení velikosti nejistot vstupních a ovlivňujících veličin při různých druzích dozimetrických měření. Na použitých příkladech si zde ale ukážeme, jakým způsobem při stanovení těchto nejistot postupovat, abychom tak konkretizovali obecné postupy uvedené v předchozích kapitolách.

### 6.1 Příklad č. 1: Stanovení absorbované dávky ve vodě za referenčních podmínek ve vysokoenergetickém fotonovém svazku

Výstupní měřenou veličinou je dávka ve vodě ve fotonovém svazku lineárního urychlovače v referenčních podmínkách měřená pomocí ionizační komory a elektrometru.

#### (i) model měření, možné korelace vstupních veličin

Model měření je popsán následujícím vztahem (viz např. [1]):

$$D_w = M \cdot N_{D,w}(Q_0) \cdot k_{Q,Q_0} \cdot k_T \cdot k_p \cdot k_{sat} \cdot k_{pol} \cdot k_{el} \cdot \prod_i k_i \quad (22)$$

Tabulka č. 6: Přehled veličin modelu pro příklad č. 1

| Veličina | Označení       | Název  | Jednotka |
|----------|----------------|--|----------|
| $Y$      | $D_w$          | Dávka ve vodě  | Gy       |
| $X_1$    | $M$            | Aritmetický průměr odezvy elektrometru   | C        |
| $X_2$    | $N_{D,w}(Q_0)$ | Dávkový kalibrační koeficient ionizační komory stanovený pro kvalitu kalibračního svazku $Q_0$   | Gy/C     |
| $X_3$    | $k_{Q,Q_0}$    | Opravný faktor na kvalitu měřeného svazku $Q$ odlišnou od kvality $Q_0$  |          |
| $X_4$    | $k_T$          | Oprava na teplotu vzduchu  |          |
| $X_5$    | $k_p$          | Oprava na tlak vzduchu   |          |
| $X_6$    | $k_{sat}$      | Oprava na rekombinaci  |          |
| $X_7$    | $k_{pol}$      | Oprava na polaritu   |          |
| $X_8$    | $k_{el}$       | Oprava odezvy elektrometru   |          |
| $X_9$    | $\prod k_i$    | Součin dalších opravných faktorů, např. na dlouhodobou stálost uživatele dozimetrického řetězce, ustavení referenčních podmínek a odečet elektrometru vůči monitorové komoře |          |

*Poznámka 1: Ve starší dozimetrické literatuře jsou pojmy „faktor“ a „koeficient“ často považovány prakticky za synonyma. V souladu se současnými zvyklostmi se v této publikaci budeme držet pravidla, že pojem „faktor“ je používán pro bezrozměrné veličiny, zatímco pojem „koeficient“ je používán pro veličiny, které mají fyzikální rozměr. Pro některé zavedené pojmy toto neplatí, např. se používá označení „korelační koeficient“, ač se jedná o bezrozměrnou veličinou.*

*Poznámka 2: V TRS 398 vztah pro stanovení dávky neobsahuje explicitně jiné opravné faktory než opravný faktor na kvalitu měřeného svazku. Avšak pod  $M$  se rozumí odezva elektrometru korigovaná na ovlivňující veličiny, tj. na tlak, teplotu, saturaci, polaritu a kalibraci elektrometru (z kalibračního listu). Zde se pod  $M$  rozumí nekorigovaná odezva elektrometru (aritmetický průměr měřených hodnot).*

Výstupní měřená veličina dávka ve vodě,  $D_w$ , je v tomto případě vyjádřena jako součin vstupních veličin a opravných faktorů na ovlivňující veličiny. Jedná se o situaci popsanou rovnicí ( 18 ), budeme proto pracovat pouze s relativními nejistotami a relativní standardní nejistota hodnoty výstupní veličiny bude určena vztahem ( 20 ). Vstupní a ovlivňující veličiny jsou takového druhu, že není důvod předpokládat existenci vzájemných korelací těchto veličin.

(ii) **zdroje a typy nejistot, vyčíslení hodnot vstupních veličin a jejich nejistot**

Veličina č. 1: aritmetický průměr odezvy elektrometru  $M$

Střední odezva  $M$  je stanovena z **opakovaných měření** odezvy elektrometru, jedná se tedy o veličinu, jejíž nejistota je **typu A**. Standardní nejistotu  $u(M)$  stanovíme podle vztahu ( 4 ). Jelikož bylo měření provedeno pouze pětkrát, použijeme opravný faktor  $k_A$  z Tabulky č. 1. Uvedený postup lze snadno provést v libovolném tabulkovém kalkulátoru, jak ukazuje následující tabulka.

Tabulka č. 7: Střední hodnota a nejistota typu A odezvy elektrometru

| Č. položky | Označení | Název  | Hodnota       | Jednotka  |
|------------|----------|--|---------------|-----------|
| 1          | $M_1$    | 1. odečet  | 36,11         | nC        |
| 2          | $M_2$    | 2. odečet  | 36,04         | nC        |
| 3          | $M_3$    | 3. odečet  | 36,17         | nC        |
| 4          | $M_4$    | 4. odečet  | 36,02         | nC        |
| 5          | $M_5$    | 5. odečet  | 36,03         | nC        |
| 6          | $M$      | <b>Aritmetický průměr odečtu</b>   | <b>36,074</b> | <b>nC</b> |
| 7          |          | Výběrová směrodatná odchylka souboru                                       | 0,0643        | nC        |
| 8          |          | Výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru $M$                     | 0,0287        | nC        |
| 9          | $k_A$    | Oprava na malý počet měření  | 1,06          |           |
| 10         | $u_A(M)$ | <b>Standardní nejistota aritmetického průměru <math>M</math></b>           | <b>0,0304</b> | <b>nC</b> |
| 11         | $w_A(M)$ | <b>Relativní standardní nejistota aritmetického průměru <math>M</math></b> | <b>0,0008</b> |           |

Pro relativní standardní nejistotu  $w(M)$  průměrné hodnoty odezvy elektrometru  $M$  tedy dostáváme výsledek  $w(M) = 0,8 \cdot 10^{-3}$ .

*Poznámka: Zde uvedená výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru je pravděpodobně mírně vyšší, než jsou hodnoty obvyklé v praxi. Slouží pouze pro ilustraci výpočtu. Pokud nastane případ, že všechny hodnoty  $M_i$  indikované nějakým měřidlem jsou si rovny, postupuje se podle poznámky 2 v kapitole 3.1.1.*

Veličina č. 2: kalibrační koeficient ionizační komory pro kvalitu svazku  $Q_0$

Hodnota kalibračního koeficientu  $N_{D,w}(Q_0)$  pro kalibrační kvalitu svazku  $Q_0$  ( $^{60}\text{Co}$ ) je uvedena v **kalibračním listu** ionizační komory. Jedná se tedy o veličinu, jejíž nejistota je **typu B**. Kalibrační list udává, že platí  $N_{D,w}(Q_0) = 5,418 \cdot 10^7 \text{ Gy/C}$ . Dále je v kalibračním listu uvedeno: "Relativní nejistota kalibračního koeficientu je 2,0 %. Uvedená nejistota je součinem relativní standardní nejistoty měření a koeficientu  $k$ , který odpovídá pravděpodobnosti pokrytí přibližně 95 %, což pro normální rozdělení odpovídá koeficientu rozšíření  $k = 2$ ." Z údajů v kalibračním listu tedy vyplývá, že velikost relativní standardní nejistoty kalibračního koeficientu  $N_{D,w}(Q_0)$  je  **$1,0 \cdot 10^{-2}$** .

Veličina č. 3: opravný faktor na kvalitu měřeného svazku  $Q$  odlišnou od kvality  $Q_0$

Opravný faktor  $k_{Q,Q_0}$  pro daný fotonový svazek lineárního urychlovače a použitou ionizační komoru nalezneme v doporučení [1]. Jedná se tedy o veličinu, jejíž nejistota je **typu B**. V tabulce č. 6.IV (ve starší

verzi č. 15) doporučení [1] je uvedena doporučená hodnota relativní standardní nejistoty tohoto faktoru  $1,0 \cdot 10^{-2}$ .

Veličiny č. 4 (oprava na teplotu vzduchu), č. 5 (oprava na tlak vzduchu), č. 6 (oprava na rekombinaci) a č. 7 (oprava na polaritu):

V dokumentu [1] je v tabulce č. 6.IV (ve starší verzi č. 15) uvedena doporučená typická souhrnná hodnota **0,4 %** pro relativní standardní nejistotu vnášenou do měření těmito ovlivňujícími veličinami (Correction on influence quantities). Pokud pracujeme s pravidelně kalibrovanými měřidly tlaku a teploty a pokud i další podmínky měření odpovídají požadavkům uvedeným v kapitole 6.8 dokumentu [1], pak můžeme pro výpočet celkové nejistoty měření použít tuto hodnotu. Jedná se o nejistotu **typu B**.

*Poznámka: V TRS 398 je uvedeno, že do „correction on influence quantities“ patří i oprava na kalibraci elektrometru, byl-li elektrometr kalibrován zvlášť. Uvedená nejistota tedy zahrnuje i případnou nejistotu kalibračního koeficientu elektrometru.*

Veličina č. 8 (oprava odezvy elektrometru):

Je-li ionizační komora kalibrována spolu s elektrometrem, pak se opravný faktor na odezvu elektrometru nezavádí (resp. položí se rovný jedné), a není tudíž třeba uvažovat jeho nejistotu. (Něco jiného je dlouhodobá stálost uživatelova elektrometru, viz součin dalších opravných faktorů.)

Jsou-li ionizační komora a elektrometr kalibrovány odděleně, máme k dispozici dávkový kalibrační koeficient ionizační komory a kalibrační koeficient elektrometru  $k_{el}$  (oprava odezvy elektrometru), přičemž u obou známe nejistotu jejich stanovení. *Jak již bylo řečeno v poznámce výše, v TRS 398 je nejistota kalibračního koeficientu elektrometru (byl-li kalibrován zvlášť) zahrnuta v nejistotě korekcí na ovlivňující veličiny.*

Vedle nejistoty kalibračního koeficientu elektrometru (ať už je ionizační komora kalibrována s elektrometrem či odděleně) můžeme do položky č. 8 zahrnout ještě i existenci **vlastní (přístrojové) nejistoty odezvy elektrometru**. V dokumentaci elektrometru je obvykle možno najít kvantitativní informaci o *nejistotě* měření (measurement uncertainty) nebo o *přesnosti* (accuracy). Měříme-li například s elektrometrem Unidos E, můžeme najít v dokumentaci přístroje tento údaj: „**Přesnost měření proudu a náboje:  $\leq (0,5 \% + 1 \text{ impuls})$** “. Jedná se o nejistotu **typu B**, která je do měření vnášena elektrometrem a není zatím v našich úvahách zohledněna.

V tomto příkladu budeme uvažovat kalibrační koeficient elektrometru za rovný jedné,  $k_{el} = 1.00$ , a budeme vyčíslovat pouze přístrojovou nejistotu odezvy elektrometru.

Často je v dokumentaci dozimetrických měřidel uvedena *přesnost* přístroje bez upřesnění, v jakém vztahu ke *standardní nejistotě* měření typu B je tato *přesnost*. Pro náš vzorový výpočet není tato informace klíčová, v klinické praxi bychom si ale raději měli toto upřesnění vyžádat od výrobce nebo dodavatele měřidla. Zcela nezbytné by to bylo v situaci, kdy by tato dílčí nejistota byla významnou nebo dokonce dominantní položkou v celkové bilanci nejistot (v našem vzorovém příkladu tomu tak není).

V našem vzorovém výpočtu budeme pro jednoduchost předpokládat, že výrobcem udaná *přesnost* je rovna rozšířené nejistotě s pravděpodobností pokrytí cca 95 %. Za standardní nejistotu budeme tedy považovat polovinu hodnoty udávané výrobcem. Ve výpočtu musíme zohlednit, že tato nejistota má jak pevnou část nezávislou na odezvě (1 impuls), tak i proměnlivou část závislou na odezvě (0,5 % odezvy). Postup a výsledek výpočtu ukazuje následující tabulka.

Tabulka č. 8: Nejistota opravného faktoru odezvy elektrometru  $k_{el}$

| Č. položky | Označení    | Název  | Hodnota       | Jednotka |
|------------|-------------|--|---------------|----------|
| 1          | $M$         | <b>Aritmetický průměr odečtu</b>   | <b>36,074</b> | nC       |
| 2          | $u_{B1}(M)$ | 0,5 % ze střední odezvy $M/2$ (první složka typu B)  | 0,0902        | nC       |
| 3          | $u_{B2}(M)$ | „1 count/2“ (druhá složka nejistoty typu B)  | 0,005         | nC       |
| 4          | $u_B(M)$    | <b>Standardní nejistota typu B (součet nejistot <math>u_{B1}</math> a <math>u_{B2}</math>)</b> | <b>0,0952</b> | nC       |
| 5          | $w(k_{el})$ | <b>Relativní standardní nejistota typu B</b>   | <b>0,0026</b> |          |

Vidíme, že pevná složka nejistoty (položka 3) se v našem příkladu do celkové nejistoty prakticky nepromítne, protože je řádově menší než proměnlivá složka nejistoty (položka 2). Pokud by ale byla měřená hodnota dávky (a tedy i odezva elektrometru) desetkrát menší než v našem příkladu, pevná složka nejistoty by už celkovou nejistotu odezvy elektrometru zřetelně ovlivňovala.

Veličina č. 9 (součin dalších opravných faktorů):

Např. oprava na dlouhodobou stálost uživatelova elektrometru, na ustavení referenčních podmínek a na odečet elektrometru vůči monitorové komoře. V dokumentu [1] je v tabulce č. 6.IV (ve starší verzi č. 15) uvedena pro nejistotu dlouhodobé stálosti uživatelova elektrometru hodnota 0,3 % (lze zpřesnit na základě opakovaných měření v kontrolním zdroji), pro nejistotu ustavení referenčních podmínek hodnota 0,4 % a pro nejistotu odečtu elektrometru vůči monitorové komoře 0,6 %. V kvadratickém součtu to tedy je pro zde uvedené opravné faktory **0,78 %**. Pokud podmínky měření odpovídají požadavkům uvedeným v kapitole 6.8 dokumentu [1], pak můžeme pro výpočet nejistoty součinu těchto opravných faktorů použít tuto hodnotu. Jedná se o nejistotu **typu B**.

(iii) **stanovení hodnoty výstupní měřené veličiny**

Dosažením hodnot vstupních veličin do rovnice modelu spočteme naměřenou hodnotu  $D_w = 2.00 \text{ Gy}$ .

Tabulka č. 9: Hodnoty vstupních veličin a naměřená hodnota výstupní veličiny

| Veličina | Označení                | Název  | Hodnota      | Jednotka  |
|----------|-------------------------|--|--------------|-----------|
| $X_1$    | $M$                     | Aritmetický průměr odezvy elektrometru   | 36,074E-9    | C         |
| $X_2$    | $N_{D,w}(Q_0)$          | Dávkový kalibrační koeficient ionizační komory stanovený pro kvalitu kalibračního svazku $Q_0$ | 5,398E+07    | Gy/C      |
| $X_3$    | $k_{Q,Q_0}$             | Opravný faktor na kvalitu měřeného svazku Q odlišnou od kvality $Q_0$                          | 0,988        |           |
| $X_4$    | $k_T$                   | Oprava na teplotu vzduchu  | 1,0095       |           |
| $X_5$    | $k_p$                   | Oprava na tlak vzduchu   | 1,0263       |           |
| $X_6$    | $k_{sat}$               | Oprava na rekombinaci  | 1,0028       |           |
| $X_7$    | $k_{pol}$               | Oprava na polaritu   | 1,0007       |           |
| $X_8$    | $k_{el}$                | Oprava odezvy elektrometru   | 1            |           |
| $X_9$    | $\prod k_i$             | Součin dalších opravných faktorů   | 1            |           |
| <b>Y</b> | <b><math>D_w</math></b> | <b>Dávka ve vodě</b>   | <b>2,000</b> | <b>Gy</b> |



(iv) **stanovení standardní nejistoty hodnoty výstupní měřené veličiny**

Následující tabulka shrnuje výše odvozené hodnoty dílčích relativních standardních nejistot. Relativní standardní nejistotu  $w(D_w)$  hodnoty dávky ve vodě  $D_w$  získáme jako kvadratický součet všech jednotlivých relativních standardních nejistot typu A i typu B.

Výsledná hodnota relativní standardní nejistoty hodnoty dávky je  $1,7 \cdot 10^{-2}$ .

Tabulka č. 10: Souhrnná tabulka s přehledem standardních nejistot pro příklad č. 1

| Název nejistoty; zdroj informací o nejistotě  | Označení relativní standardní nejistoty | Typ nejistoty | Hodnota nejistoty |
|---|---|---------------|-------------------|
| Nejistota průměrné odezvy elektrometru<br>Zdroj: dle kapitoly 3.1.1   | $w(M)$                                  | A             | 0,8E-03           |
| Nejistota kalibračního koeficientu $N_{D,w}(Q_0)$<br>Zdroj: kalibrační list ionizační komory                | $w(N_{D,w})$                            | B             | 1,0E-02           |
| Nejistota opravného faktoru na kvalitu svazku<br>Zdroj: [1], Tabulka č. 6.IV (resp. 15)                     | $w(k_{Q,Q_0})$                          | B             | 1,0E-02           |
| Nejistota opravných faktorů na tlak, teplotu, saturaci a polaritu<br>Zdroj: [1], Tabulka č. 6.IV (resp. 15) | $w(k_{Tp,sat,pol})$                     | B             | 4,0E-03           |
| Přístrojová nejistota odezvy elektrometru<br>Zdroj: dokumentace výrobce elektrometru                        | $w(k_{el})$                             | B             | 2,6E-03           |
| Nejistota dalších opravných faktorů<br>Zdroj: [1], Tabulka č. 6.IV (resp. 15)                               | $w(\prod k_i)$                          | B             | 7,8E-03           |
| <b>Relativní standardní nejistota hodnoty výstupní měřené veličiny</b>                                      | <b><math>w(D_w)</math></b>              |               | <b>1,7E-02</b>    |

*Poznámka: výsledná nejistota je mírně vyšší než hodnota v TRS 398, díky konkrétní vyšší nejistotě kalibračního koeficientu (záleží na tom, v jaké kalibrační laboratoři se komora kalibruje) a díky zahrnutí nejistoty odezvy elektrometru. Nejistota typu A zde má malý vliv.*

Z této tabulky a z celého příkladu vidíme, že do výpočtu standardní nejistoty výstupní měřené veličiny vstupují dílčí nejistoty  $u(x_i)$  typu A i typu B stejným způsobem, protože výsledná standardní nejistota výstupní měřené veličiny  $u(y)$  je rovna kvadratickému součtu všech dílčích nejistot  $u_i(y)$  (vztah ( 14 )), ať už jsou tyto dílčí nejistoty  $u_i(y)$  spočteny z nejistot  $u(x_i)$  typu A nebo typu B. Vztahy pro  $u(y)$ ,  $u_i(y)$  a  $u(x_i)$  viz kapitola 3.3.2 a Tabulka č. 3. Určení typu A nebo B konkrétních nejistot  $u(x_i)$  v kroku (ii) našeho postupu bylo důležité pro správné stanovení velikostí těchto nejistot, ale v dalších výpočtech, tedy v krocích (iv-vi), už je se všemi dílčími nejistotami nakládáno stejným způsobem.

Vzhledem k rovnocennosti všech dílčích nejistot z hlediska jejich vlivu na výslednou nejistotu měření bychom proto mohli v tomto našem příkladu použít již od začátku mírně odlišný přístup, ve kterém bychom vůbec nezaváděli proměnnou  $X_4$  (opravný faktor odezvy elektrometru  $k_{el}$ ). Místo toho bychom přístrojovou nejistotu odezvy elektrometru „0,5 % + 1 impuls“ interpretovali jako nejistotu typu B proměnné  $X_1$  (průměrná odezva elektrometru  $M$ ). Kombinovanou standardní nejistotu  $u_c(x_1)$  hodnoty proměnné  $X_1$  bychom pak spočetli podle vztahu ( 7 ) jako kvadratický součet jejich standardních nejistot typu A a B.

Oba přístupy, tedy jak námi použitý přístup, tak i zmíněný alternativní postup, jsou metodicky správné a jejich výsledek je číselně totožný.

**(v) stanovení rozšířené nejistoty hodnoty výstupní měřené veličiny**

Není důvod předpokládat, že měřená veličina má jiné než normální (Gaussovo) rozdělení. Použijeme proto hodnotu koeficientu rozšíření  $k = 2$ , rozšířená relativní nejistota měření bude  $3,4 \cdot 10^{-0,2}$ .

**(vi) uvedení výsledku měření**

Pro naměřenou hodnotu  $D_w$  dávky ve vodě v referenčních podmínkách ve svazku fotonového záření lineárního urychlovače platí  $D_w = (2,00 \pm 0,07) \text{ Gy}$ . Uvedená nejistota je nejistotou rozšířenou ( $k = 2$ ) a odpovídá pravděpodobnosti pokrytí přibližně 95 %.

## 6.2 Příklad č. 2: Stanovení kermové vydatnosti zdroje $^{192}\text{Ir}$ v brachyterapii pomocí kalibračního můstku

Výstupní měřenou veličinou je kermová vydatnost zdroje  $^{192}\text{Ir}$  s vysokým dávkovým příkonem v brachyterapii měřená pomocí kalibračního můstku a ionizační komory Farmerova typu.

### (i) model měření, možné korelace vstupních veličin

Model měření je popsán následujícím vztahem (upraveno podle [2], [22]):

$$\dot{S}_K = \dot{K}_{ref} \cdot d_{ref}^2 = M \cdot N_{K,Ir} \cdot k_T \cdot k_p \cdot k_{sat} \cdot k_{el} \cdot k_{tr} \cdot k_n \cdot k_{scatt} \cdot k_{air} \cdot (d/d_{ref})^2 \cdot t^{-1} \cdot \prod_i k_i \cdot d_{ref}^2 = M \cdot N_{K,Ir} \cdot k_T \cdot k_p \cdot k_{sat} \cdot k_{el} \cdot k_{tr} \cdot k_n \cdot k_{scatt} \cdot k_{air} \cdot d^2 \cdot t^{-1} \cdot \prod_i k_i \quad (23)$$

Tabulka č. 11: Přehled veličin modelu pro příklad č. 2

| Veličina | Označení        | Název  | Jednotka   |
|----------|-----------------|--|--|
| $Y$      | $\dot{S}_K$     | Kermová vydatnost  | $\text{Gy} \cdot \text{h}^{-1} \cdot \text{m}^2$ |
|          | $\dot{K}_{ref}$ | Kermový příkon ve vzduchu, ve vakuu, v referenční vzdálenosti  | $\text{Gy} \cdot \text{h}^{-1}$                  |
| $X_1$    | $M$             | Aritmetický průměr odezvy elektrometru   | C  |
| $X_2$    | $N_{K,Ir}$      | Kalibrační koeficient ionizační komory získaný z kalibračních koeficientů ve veličině kerma ve vzduchu pro $^{60}\text{Co}$ a rtg záření 250 kV (měřeno s tloušťkou stěny a build-up návlaku $0,5 \text{ g/cm}^2$ ) se zohledněním různých vah jednotlivých kalibračních koeficientů. Váhy jsou rovny 0,8 pro $N_{K,250kV}$ a 0,2 pro $N_{K,Co}$<br>$N_{K,Ir} = (0,8 \cdot A_{w,250kV} N_{K,250kV} + 0,2 \cdot A_{w,Co} N_{K,Co}) / A_{w,Ir}$ Faktory $A_w$ jsou faktory pro dané kvality svazků a dají se pro jednotlivé ionizační komory nalézt v tabulkách. | $\text{Gy/C}$                                    |
| $X_3$    | $k_T$           | Oprava na teplotu vzduchu  |  |
| $X_4$    | $k_p$           | Oprava na tlak vzduchu   |  |
| $X_5$    | $k_{sat}$       | Oprava na rekombinaci  |  |
| $X_6$    | $k_{el}$        | Oprava odezvy elektrometru   |  |
| $X_7$    | $k_{tr}$        | Oprava na tranzitní čas při pohybu zdroje  |  |
| $X_8$    | $k_n$           | Oprava na nehomogenní elektronovou fluenci ve vzduchové dutině ionizační komory (gradient komory)  |  |
| $X_9$    | $k_{scatt}$     | Oprava na přídavné ionizace, které vznikají ze záření rozptýleného okolním materiálem  |  |
| $X_{10}$ | $k_{air}$       | Oprava na zeslabení primárních fotonů ve vzduchu mezi zdrojem a komorou  |  |
| $X_{11}$ | $d$             | Vzdálenost ionizační komory od zdroje (referenční podmínky)  | m  |
| $X_{12}$ | $d_{ref}$       | Referenční vzdálenost pro kermovou vydatnost (je rovna 1 m)  | m  |
| $X_{13}$ | $t$             | Doba měření  | s  |
| $X_{14}$ | $\prod_i k_i$   | Součin dalších opravných faktorů (např. oprava na směrovou závislost IK a variabilitu jehel, oprava na dlouhodobou stálost uživatelského elektrometru)   |  |

Výstupní měřená veličina kermová vydatnost,  $\hat{S}_K$ , je v tomto případě vyjádřena jako součin vstupních veličin a opravných faktorů na ovlivňující veličiny. Jedná se tedy, stejně jako v příkladu 1, o situaci popsanou rovnicí ( 18 ).

Pro volbu vztahu pro výpočet standardní nejistoty měření je ještě třeba zvážit existenci či neexistenci korelací. Dalo by se uvažovat o korelaci mezi odezvou elektrometru  $M$  a vzdáleností  $d^2$  a mezi odezvou  $M$  a časem  $t$ . Avšak mezi veličinami  $M$ ,  $d$  a  $t$  existuje funkční vztah. Měříme pouze odezvu, nikoliv vzdálenost a čas; vzdálenost a čas jsou konstanty. Realizace měření nezaručí, že hodnota  $d$  a  $t$  bude přímo rovná těmto konstantám, proto je třeba uvažovat nejistoty chyb realizace těchto veličin. Předpokládáme, že chyba realizace těchto veličin bude mít na výslednou hodnotu  $M$  pouze malý vliv, a tedy korelaci lze i v tomto příkladu zanedbat.

Výpočet nejistoty lze tedy provést podle zjednodušeného vztahu ( 20 ), s využitím relativních nejistot.

**(ii) zdroje a typy nejistot, vyčíslení hodnot vstupních veličin a jejich nejistot**

**Veličina č. 1: průměrná odezva elektrometru  $M$**

Postup bude stejný jako v příkladu č. 1. Průměrná odezva  $M$  je stanovena z **opakovaných měření** odezvy elektrometru, jedná se tedy o veličinu, jejíž nejistota je **typu A**. Standardní nejistotu  $u(M)$  stanovíme podle vztahu ( 4 ). Jelikož bylo měření provedeno pouze šestkrát (měření ve dvou katetech po 3 hodnotách), použijeme opravný faktor  $k_A$  z Tabulky č. 1. Výsledek výpočtu ukazuje následující tabulka.

Tabulka č. 12: Průměrná hodnota a nejistota typu A odezvy elektrometru pro příklad č. 2

| Č. položky | Označení | Název  | Hodnota       | Jednotka  |
|------------|----------|--|---------------|-----------|
| 1          | $M_1$    | 1. odečet  | 1,183         | nC        |
| 2          | $M_2$    | 2. odečet  | 1,185         | nC        |
| 3          | $M_3$    | 3. odečet  | 1,180         | nC        |
| 4          | $M_4$    | 4. odečet  | 1,172         | nC        |
| 5          | $M_5$    | 5. odečet  | 1,175         | nC        |
| 6          | $M_6$    | 6. odečet  | 1,173         | nC        |
| 7          | $M$      | <b>Aritmetický průměr odečtu</b>   | <b>1,178</b>  | <b>nC</b> |
| 8          |          | Výběrová směrodatná odchylka souboru                                       | 0,0054        | nC        |
| 9          |          | Výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru $M$                     | 0,0022        | nC        |
| 10         | $k_A$    | Oprava na malý počet měření  | 1,05          |           |
| 11         | $u_A(M)$ | <b>Standardní nejistota aritmetického průměru <math>M</math></b>           | <b>0,0023</b> | <b>nC</b> |
| 12         | $w_A(M)$ | <b>Relativní standardní nejistota aritmetického průměru <math>M</math></b> | <b>0,0020</b> |           |

**Veličina č. 2: interpolovaný kalibrační koeficient ionizační komory pro kvalitu svazku  $^{192}\text{Ir}$**

Při stanovení hodnoty kalibračního koeficientu ionizační komory pro záření zdroje  $^{192}\text{Ir}$  budeme vycházet z kapitoly 6.4.2 doporučení [2], v níž je uveden i zjednodušený empirický vztah

$$N_{K,Ir} = 0.8 \cdot N_{K,250kV} + 0.2 \cdot N_{K,Co} \quad , \quad (24)$$

kde  $N_{K,250kV}$  a  $N_{K,Co}$  jsou kalibrační koeficienty použité ionizační komory stanovené kalibrační laboratoří pro rentgenový svazek 250 kV s definovanou filtrací a pro radionuklidový svazek  $^{60}\text{Co}$ . Kalibrační koeficient  $N_{K,Ir}$  pro záření zdroje  $^{192}\text{Ir}$  je spočten lineární interpolací z hodnot kalibračních koeficientů pro vyšší a nižší energii fotonů. Jedná se tedy o situaci, která je popsána výše v kapitole 3.1.4.

Pro náš ilustrační výpočet budeme předpokládat, že v kalibračních listech jsou udány tyto hodnoty a relativní standardní nejistoty kalibračních koeficientů:  $N_{K,250kV} = 4,06 \cdot 10^{-2} \text{ Gy/nC}$  s relativní standardní nejistotou 1,0 % a  $N_{K,Co} = 4,12 \cdot 10^{-2} \text{ Gy/nC}$  s relativní standardní nejistotou 0,6 % (konkrétní nejistota je nutné vzít z kalibračních listů komory). Při výpočtu budeme vycházet ze vztahů (9) až (12) uvedených v kapitole 3.1.4. Hodnoty Langrangeových polynomů prvního řádu v daném vnitřním bodě intervalu jsou rovny relativním vzdálenostem tohoto bodu od koncových bodů intervalu, v němž interpolace probíhá. Pro náš případ bude tedy platit  $L1 = 0,8$  a  $L2 = 0,2$ .<sup>1</sup>

Výsledek výpočtu hodnoty a nejistoty interpolovaného kalibračního koeficientu je uveden v následující tabulce. Nejistota je **typu B**.

Tabulka č. 13: Výpočet kalibračního koeficientu  $N_{K,Ir}$  a jeho standardní nejistoty

| Název svazku   | 250 kV   | 60 Co    | 0,8*250kV+0,2*60Co |
|--|----------|----------|--------------------|
| Kvalita svazku (efektivní energie) [keV]   | 131      | 1250     | 355                |
| Kalibrační koeficient $N_{K,a}$ [Gy/nC]  | 4,06E-02 | 4,12E-02 | 4,07E-02           |
| Relativní standardní nejistota kalibračního koeficientu                            | 1,0E-02* | 6E-03*   |                    |
| Standardní nejistota kalibračního koeficientu [Gy/nC]                              | 4,1E-04  | 2,5E-04  |                    |
| Hodnota L1 v bodě E = 355 keV  |          |          | 0,8                |
| Hodnota L2 v bodě E = 355 keV  |          |          | 0,2                |
| Standardní nejistota kalibračního koeficientu podle vztahu (11) (je-li korelace)   |          |          | 3,8E-04            |
| Standardní nejistota kalibračního koeficientu podle vztahu (12) (není-li korelace) |          |          | 3,4E-04            |

\*nejistoty zde uvedené jsou dosti nízké oproti běžné praxi v ČR (např. oproti kalibraci v ČMI)

Pokud byly hodnoty kalibračních koeficientů  $N_{K,250kV}$  a  $N_{K,Co}$  získány v různých kalibračních laboratořích, můžeme předpokládat jejich nezávislost a použít hodnotu nejistoty spočtenou podle vztahu (12). Pokud obě hodnoty pocházejí z jednoho kalibračního listu, bylo by správnější použít pro další výpočty nejistotu spočtenou podle vztahu (11). Vidíme, že předpoklad o vzájemné nezávislosti hodnot, mezi kterými interpolujeme, vede k mírnému zmenšení nejistoty interpolované hodnoty.

#### Veličiny č. 3 až 5: opravné faktory na tlak, teplotu, saturaci

V dokumentu [1] je v tabulce č. 5.II (ve starší verzi č. 11) uvedena doporučená typická souhrnná hodnota **0,3 %** pro relativní standardní nejistotu vnášenou do měření těmito veličinami (Correction on influence quantities). Jedná se o nejistotu **typu B**.

#### Veličina č. 6: oprava odezvy elektrometru $k_{el}$

Stejně jako v příkladu č. 1 využijeme tento opravný faktor k tomu, abychom do bilance nejistot započítali vlastní nejistotu odezvy elektrometru. Předpokládáme, že měření bylo provedeno stejným typem měřidla jako v příkladu č. 1, tedy že výrobcem udaná nejistota odezvy je „0,5 % + 1 impuls“ a že se jedná o rozšířenou nejistotu (k=2). Nejistota je **typu B**.

<sup>1</sup> Postup uvedený v doporučení [2] není plně vnitřně konzistentní, protože výpočet váženého průměru kermových kalibračních koeficientů v kapitole 6.4.2 doporučení IAEA je prováděn pro bod s efektivní energií 355 keV, zatímco efektivní energie zářiče <sup>192</sup>Ir uvedená v tomtéž doporučení je 397 keV. Pro účely našeho vzorového výpočtu je ale tato drobná nedůslednost nepodstatná a budeme zde všechny výpočty provádět v souladu s postupem uvedeným v kapitole 6.4.2 uvedeného doporučení IAEA.

Veličiny č. 7 ( $k_{tr}$ , oprava na tranzitní čas při pohybu zdroje), č. 8 ( $k_p$ , oprava na nehomogenní elektronovou fluenci v ionizační komoře), č. 9 ( $k_{scatt}$ , oprava na přidatné ionizace z rozptylu na okolním materiálu) a č. 10 ( $k_{air}$ , oprava na zeslabení primárních fotonů ve vzduchu):

Nejistoty těchto opravných faktorů jsou nejistotami **typu B**. Blíže se zde hodnotami ani nejistotami těchto opravných faktorů nebudeme zabývat, jejich hodnotu a velikost je možno pro konkrétní měřicí geometrii a ionizační komoru dohledat v doporučení [2], [22] a v další odborné literatuře. Předpokládejme, že velikost relativní standardní nejistoty  $w(x_i)$  žádného z těchto faktorů nepřesáhne hodnotu  $1 \cdot 10^{-3}$ . Je-li počet těchto faktorů  $N$ , pak za využití vztahů ( 18 – 23 ) odhadneme, že relativní standardní nejistota jejich součinu nepřesáhne hodnotu  $\sqrt{N} \cdot 10^{-3}$ , tedy **0,002**.

#### Veličina č. 11: vzdálenost ionizační komory od zdroje

Údaj o nejistotě vzdálenosti mezi středem ionizační komory a zdrojem záření d můžeme získat z dokumentace dodané k měřicímu můstku (v tom případě bude tato nejistota typu B), nebo bychom mohli tuto vzdálenost opakovaně měřit přesným měřidlem a naměřené hodnoty statisticky vyhodnotit (v takovém případě by se jednalo o nejistotu typu A). Pro náš výpočet budeme předpokládat, že standardní nejistota této vzdálenosti je **typu B** a její velikost je **0,5 mm**.

#### Veličina č. 12: referenční vzdálenost pro výpočet kermové vydatnosti

Tato veličina ve skutečnosti není proměnnou veličinou, ale je to konstantní definovaná vzdálenost, jejíž nejistota je rovna nule. Navíc se v uvedeném vztahu tato vzdálenost vykrátí.

#### Veličina č. 13: doba měření

V dokumentaci měřidla Unidos není možno zjistit, jaká je nejistota doby integrace náboje. Velikost této nejistoty by bylo možno zjistit dotazem u dodavatele nebo výrobce. Pro náš ilustrační výpočet budeme předpokládat, že standardní nejistota doby měření je **0,5 ms**. Jedná se o nejistotu **typu B**.

#### Veličina č. 14: součin dalších opravných faktorů

Do této souhrnné položky zahrneme opravu na směrovou závislost IK a variabilitu jehel (1,2 %) a opravu na dlouhodobou stálost uživateleva elektrometru (0,3 %, viz TRS 398). Nejistota jejich součinu je **1,3 %**.

#### **(iii) stanovení hodnoty výstupní měřené veličiny**

Hodnoty vstupních veličin a jejich nejistoty jsou shrnuty v následující tabulce. Naměřená hodnota kermové vydatnosti zdroje  $^{192}\text{Ir}$  je  $\hat{S}_K = 30,72 \text{ mGy/hod} \cdot \text{m}^2$ .

Tabulka č. 14: Hodnoty vstupních veličin a jejich standardních nejistot pro příklad č. 2

| Veličina | Označení   | Název veličiny   | Číselná hodnota | Jednotka | Standardní nejistota | Jednotka | Relativní standardní nejistota | Typ nejistoty |
|----------|------------|--|-----------------|----------|----------------------|----------|--------------------------------|---------------|
| $X_1$    | $M$        | Odezva elektrometru  | 1,178           | nC       | 2,3E-03              | nC       | 2,0E-03                        | A             |
| $X_2$    | $N_{K,Ir}$ | Interpolovaný kalibrační koeficient IK pro $^{192}\text{Ir}$ | 4,073E-02       | Gy/nC    | 3,3E-04              | Gy/nC    | 8,0E-03                        | B             |
| $X_3$    | $k_T$      | Oprava na teplotu vzduchu                                    | 1,007           |          | 5,0E-03              |          | 3,0E-03                        | B             |
| $X_4$    | $k_p$      | Oprava na tlak vzduchu                                       | 1,049           |          |                      |          |                                |               |
| $X_5$    | $k_{sat}$  | Oprava na rekombinaci  | 1,000           |          |                      |          |                                |               |

|          |             |  |              |   |         |   |              |   |
|----------|-------------|--|--------------|---|---------|---|--------------|---|
| $X_6$    | $k_{el}$    | Oprava odezvy elektrometru   | 1,000        |   | 2,9E-03 |   | 2,9E-03      | B |
| $X_7$    | $k_{tr}$    | Oprava na tranzitní čas při pohybu zdroje                                    | 1,000        |   | 2,0E-03 |   | 2,0E-03      | B |
| $X_8$    | $k_n$       | Oprava na nehomogenitu   | 1,009        |   |         |   |              |   |
| $X_9$    | $k_{scatt}$ | Oprava na přídatné ionizace  | 1,000        |   |         |   |              |   |
| $X_{10}$ | $k_{air}$   | Oprava na zeslabení ve vzduchu   | 1,001        |   |         |   |              |   |
| $X_{11}$ | $d$         | Referenční podmínky  | 0,1          | m                                       | 5,0E-04 | m | 5,0E-03      | B |
| $X_{12}$ | $d_{ref}$   | Referenční vzdálenost  | 1            | m                                       | -       | - | -            | - |
| $X_{13}$ | $t$         | Doba měření  | 60           | s                                       | 5,0E-04 | s | 8,3E-06      | B |
| $X_{14}$ | $I/k_i$     | Součin dalších opravných faktorů (variabilita jehel, stabilita elektrometru) | 1,000        |   | 1,3E-02 |   | 1,3E-02      | B |
| $Y$      | $\dot{S}_K$ | <b>Kermová vydatnost</b>   | <b>30,72</b> | mGy.<br>h <sup>-1</sup> .m <sup>2</sup> |         |   | <b>0,019</b> |   |

**(iv) stanovení standardní nejistoty hodnoty výstupní měřené veličiny**

Vyjádření relativní standardní nejistoty hodnoty výstupní veličiny podle vztahu ( 20 ) je uvedeno v Tabulce č. 14 výše. Do kvadratického součtu vstoupila nejistota vzdálenosti komory od zdroje  $d$  následovně:  $[2 \cdot u(x_{11})]^2$ . Relativní standardní nejistota hodnoty výstupní měřené veličiny vyšla **0,019, neboli 1,9 %**.

Při použití nejistot kalibračních koeficientů z kalibračních listů z ČMI,  $\sigma = 1,7 \%$  pro rentgenový svazek a  $\sigma = 1,1 \%$  pro kobaltový svazek (nejistota 1,4 % pro interpolovaný kalibrační koeficient) by relativní standardní nejistota hodnoty kermové vydatnosti vyšla 2,25 % ( $k = 1$ ).

**(v) stanovení rozšířené nejistoty hodnoty výstupní měřené veličiny**

Stejně jako v příkladu č. 1 není důvod předpokládat, že měřená veličina má jiné než normální (Gaussovo) rozdělení. Použijeme proto hodnotu koeficientu rozšíření  $k = 2$ , rozšířená nejistota měření bude **1,2 mGy/hod. m<sup>2</sup>**.

**(vi) uvedení výsledku měření**

Pro naměřenou hodnotu  $\dot{S}_K$  kermové vydatnosti zdroje záření <sup>192</sup>Ir platí

**$\dot{S}_K = (30,7 \pm 1,2) \text{ mGy} \cdot \text{hod}^{-1} \cdot \text{m}^2$** . Uvedená nejistota je nejistotou rozšířenou ( $k = 2$ ) a odpovídá pravděpodobnosti pokrytí přibližně 95 %.

## 7. Posouzení shody výsledku měření se specifikací/požadavkem, rozhodovací pravidla

V praxi je obvykle potřeba nejen hodnotu dané veličiny (a její nejistotu) stanovit, ale také ji porovnat se specifikací/požadavkem/tolerancí. Pro toto porovnání existují různá pravidla a vždy je nutné přesně uvést, jaké rozhodovací pravidlo bylo pro rozhodování o shodě použito.

V klinické dozimetrii se nejčastěji setkáváme s případem, kdy porovnáváme hodnotu stanovené (změřené) veličiny vůči hodnotě referenční (stanovené při přijímací zkoušce) nebo vůči řadě hodnot předcházejících v čase (při zkouškách provozní stálosti).

Pro porovnání shody stanovené veličiny s referenční hodnotou se při hodnocení vlastností zdrojů (PZ, ZDS, ZPS) obvykle užívají **fixní tolerance** vycházející z doporučení SÚJB, viz kapitola 7.1. Je-li např. uvedena tolerance 2 %, znamená to, že stanovená absorbovaná dávka se od referenční hodnoty nesmí odlišovat více než o 2%. Při tomto rozhodovacím pravidle se neuplatňuje znalost hodnoty nejistoty stanovené veličiny.

Při porovnávání stanovené hodnoty vůči hodnotám předcházejícím v čase, tedy pro řady naměřených hodnot, lze s výhodou použít statistické hodnocení – **statisticky řízenou kontrolu procesu**. Tato metoda a příklady jejího využití při provádění zkoušek zdrojů je popsána v Příloze B.

Je otázkou, nakolik jsou fixní tolerance uváděné v metodikách (PZ, ZDS, ZPS) optimální pro daný účel. Je zřejmé, že jiný rozdíl hodnot lze očekávat od opakovaného měření na pracovišti stejným dozimetrickým řetězcem v měsíčním odstupu než od měření jinou osobou jiným dozimetrickým řetězcem kalibrovaným v jiné kalibrační laboratoři oproti měření pracovištěm. Zde lze s výhodou použít **statistický přístup** se zohledněním modelu (situace), nejistot a požadavku na shodu. Je pak možné stanovit v metodice specifické tolerance pro ten který model. Tento postup je popsán v článku Koniarové, Kotíka [20]. V kapitole 7.2 je popsán postup pro statistické zhodnocení shody dvou výsledků měření.

Pro posouzení shody výsledku měření se specifikací se zohledněním nejistoty měření a tolerance lze použít **dokument ILAC** [7] popsáný v kapitole 7.3. Tento postup lze použít za předpokladu, že výsledek měření má v podstatě normální rozdělení (což u absorbované dávky předpokládáme) a že poměr rozšířeného intervalu nejistoty ke specifikovanému intervalu (toleranci) je přiměřeně malý (což už u stanovení dávky obvykle splněno není). Nicméně je dobré toto rozhodovací pravidlo znát.

### 7.1 Doporučení SÚJB, metodiky (fixní tolerance)

Výhodou tohoto postupu je, že je jednoduchý, jednoznačný a snadno srovnatelný s dalšími subjekty. Při hodnocení vlastností zdrojů např. téměř všichni používají toleranci pro stanovení dávky 2 % ve fotonových svazcích a 3 % v elektronových svazcích. Chybí tam ovšem vazba na nejistoty a možné statistické inferenční vstupní veličin. Tento přístup může vést k zakrytí chyb měření, které jsou zbytečné a při pečlivějším přístupu a optimalizovaných tolerancích by mohly být objeveny a odstraněny. Navíc žádné doporučení nemůže pokrýt všechna specifika daného parametru v konkrétní situaci, a je tedy vhodné, aby tolerance byly před jejich zavedením přezkoumány a optimalizovány.

### 7.2 Srovnání výsledků měření dvou subjektů na základě statistické inferenční

Zde uvedený postup vychází z článku Koniarové, Kotíka [20], ale oproti článku volí modifikovaný a mírně zjednodušený postup, který slouží ke statistickému posouzení shody dvou absorbovaných dávek. Nelze ho použít ke konstrukci např. tolerančního intervalu pro rozdíl dávek, protože postup nezohledňuje hodnotu a nejistotu sdílených veličin ( $A$  ze vzorce (29)). Nejistota sdílených veličin sice nemusí mít na posouzení rozdílu způsobeného nesdílenými veličinami vliv, ale projeví se v délce



intervalu pro rozdíl dávek. Pro konstrukci intervalů je možné použít postup z článku Koniarová, Kotík [20], jehož výstup je jako příklad uveden v kapitole 7.2.6.

Metoda bude vysvětlena na případě stanovení absorbované dávky ve vodě za referenčních podmínek pro vysokoenergetické fotonové a elektronové svazky. Vychází z dílčích nejistot porovnávaných hodnot dávek. Budou popsány čtyři statistické modely popisující čtyři různé situace k posouzení kritických hodnot pro zamítnutí nulové hypotézy o shodě absorbovaných dávek.

- Případ (a) Dvě měření provedená stejným dozimetrickým řetězcem s měsíčním odstupem (ZPS).  
 Případ (b) Dvě měření provedená dvěma dozimetrickými řetězci stejného typu kalibrovanými ve dvou různých kalibračních laboratořích (nezávislé výpočty dávky).  
 Případ (c) Dvě měření provedená stejným dozimetrickým řetězcem v krátkém časovém intervalu.  
 Případ (d) Dvě měření provedená dvěma dozimetrickými řetězci kalibrovanými ve stejné kalibrační laboratoři.

### 7.2.1. Model absorbované dávky

Absorbovaná dávka ve vodě dvěma dozimetrickými řetězci ( $D_1, D_2$ ) se dle TRS 398 stanoví pro fotony v referenčním bodě:

$$D_1 = M_1 N_1 k_{Q_0 1} \prod_{j=1}^n k_{1j},$$

$$D_2 = M_2 N_2 k_{Q_0 2} \prod_{j=1}^n k_{2j}.$$

( 27 )

Pro elektrony v hloubce maxima se stanoví jako:

$$D_1 = M_1 N_1 k_{Q_0 1} \frac{100 \%}{PDD_1} \prod_{j=1}^n k_{1j},$$

$$D_2 = M_2 N_2 k_{Q_0 2} \frac{100 \%}{PDD_2} \prod_{j=1}^n k_{2j}.$$

( 28 )

$D_i$  značí absorbovanou dávku,  $M_i$  je nekorigovaný odečet dozimetru,  $N_i$  je dávkový kalibrační faktor,  $k_{Q_0 i}$  je korekční faktor na kvalitu záření,  $\prod_{j=1}^n k_{ij}$  je korekce na ovlivňující veličiny (tlak, teplotu, saturaci, polaritu, kalibraci elektrometru) a  $PDD_i$  hloubková dávková křivka.

Nejistota pro  $M_i$  zahrnuje nejistotu na dlouhodobou stálost dozimetru (0,003), odečet dozimetru vůči MU (0,006), a ustavení referenčních podmínek (0,004), tedy celkem 0,008 (dle TRS 398). Hodnoty těchto korekcí se kladou rovny jedné, nejistoty jsou ale nenulové. Nejistota typu A se zde zanedbává. Nejistota pro  $N_i$  je nejistota dávkového kalibračního faktoru z kalibračního listu pro  $k = 1$  (např. 0,07). Nejistota pro  $k_{Q_0 i}$  je 0,01 (dle TRS 398). Nejistota pro  $\prod_{j=1}^n k_{ij}$  je 0,004 (dle TRS 398). Přehledně jsou odhady středních hodnot a CV použité pro výpočet dávky uvedeny v Tabulce č. 22.

Tabulka č. 22: Typické hodnoty použité pro výpočet absorbované dávky ve vodě.

| Odhad   | $M_i$ [C]             | $N_i$ [Gy/C]      | $k_{QQ_0i}$ | $\prod_{j=1}^n k_{ij}$ | 100 % / PDD * |
|---|-----------------------|-------------------|-------------|------------------------|---------------|
| <b>Střední hodnota</b>                            | $39,0 \times 10^{-9}$ | $5,4 \times 10^7$ | 0,99        | 1,048                  | -             |
| <b>Rel. stand. nejistota, <math>w_{ij}</math></b> | 0,008                 | 0,007             | 0,01        | 0,004                  | 0,006         |

\*Hodnota PDD je energeticky závislá.

Hodnoty relativní standardní nejistoty jsou příklady (odpovídají hodnotám v TRS 398, vyjma pro  $N_i$ ). Lze pracovat s vlastními hodnotami. Nejistota PDD byla odhadnuta pro elektronový svazek (přepočít z referenční hloubky do hloubky maxima).

### 7.2.2. Obecný model pro statistické posouzení

Situace (a), (b) a případně obdobné situace, kde by v součinu pro výpočet další absorbované dávky vystupovaly další veličiny, budou řešeny dosazováním do obecných rovnic. Vyjádření pro absorbovanou dávku se dvěma dozimetrickými řetězci vyjádříme ve tvaru

$$\begin{aligned} D_1 &= AX_1, \\ D_2 &= AX_2, \end{aligned} \quad (29)$$

kde  $A$  je součin sdílených veličin pro oba dozimetrické řetězce a  $X_1, X_2$  jsou součiny nesdílených veličin pro oba dozimetrické řetězce, viz Tabulka č. 23. Nesdílené veličiny označme  $X_{i1}, \dots, X_{in}, i = 1, 2$ , tedy

$$X_i = \prod_{j=1}^n X_{ij}. \quad (30)$$

Relativní standardní nejistotu (variační koeficient) jednotlivých nesdílených veličin označme  $CV(X_{ij})$ . Přibližný odhad variačního koeficientu (relativní standardní nejistota) součinu nesdílených veličin  $X_i, i = 1, 2$  bude

$$CV_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n CV^2(X_{ij})}, i = 1, 2. \quad (31)$$

Dále definujeme parametr  $\sigma$  jako (log značí přirozený logaritmus)

$$\sigma = \sqrt{\log(1 + CV_1^2) + \log(1 + CV_2^2)}. \quad (32)$$

**Testovou statistiku  $T$**  definujeme jako

$$T = \frac{\log(X_1) - \log(X_2)}{\sigma}. \quad (33)$$

Testujeme shodu dávek pro dva dozimetrické řetězce, statisticky formulováno testujeme nulovou hypotézu  $H_0: ED_1 = ED_2$  (E značí operátor střední hodnoty). Pro danou hladinu testu  $\alpha$  (typicky  $\alpha = 0,05$ ) **zamítneme nulovou hypotézu, tedy shodu absorbovaných dávek pro oba dozimetrické řetězce, pokud**

$$|T| > q_{1-\alpha/2}, \quad (34)$$

kde  $q_p$  značí  $p$ -kvantil standardního normálního rozdělení. Pro  $\alpha = 0,05$  platí  $q_{0,975} \cong 1,96$  a pro  $\alpha = 0,01$  platí  $q_{0,995} \cong 2,58$ .

Alternativní způsob posouzení shody (v dnešní době běžnější) je pomocí  $p$ -hodnoty. **P-hodnotu** ( $p$ ) shody absorbovaných dávek ve dvou dozimetrických řetězcích spočteme pomocí vztahu

$$p = 2(1 - \Phi(|T|)), \quad (35)$$

kde  $\Phi$  značí distribuční funkci standardního normálního rozdělení. Pokud  $p < \alpha$ , tak zamítáme nulovou hypotézu o shodě dávek pro dva dozimetrické řetězce.

Tabulka č. 23: Sdílené a nesdílené proměnné pro fotony pro jednotlivé případy (a) až (d).

| $D = MNk_{Q_0} \prod_j k_j$ | Sdílené ( $A$ )               | Nesdílené ( $X_i$ )      |
|-----------------------------|-------------------------------|--------------------------|
| (a) 1 řetězec, měsíční ZPS  | $Nk_{Q_0}$                    | $M_i \prod_j k_{ij}$     |
| (b) 2 řetězce, 2 KL         | $k_{Q_0}$                     | $M_i N_i \prod_j k_{ij}$ |
| (c) 1 řetězec, denní ZPS    | $Nk_{Q_0} \prod_j k_j$        | $M_i$                    |
| (d) 2 řetězce, stejná KL    | $k_{Q_0}$ a efekt KL na $N_i$ | $M_i \prod_j k_{ij}$     |

KL – kalibrační laboratoř

### 7.2.3. Postup

Posouzení shody probíhá výpočtem součinů (veličiny  $X_1, X_2$ ) nesdílených veličin (veličiny vstupující do součinu jsou určeny scénářem (a) až (d)), hodnoty parametru  $\sigma$  a jejich následném dosazení do rovnice ( 33 ). Prohlášení o statisticky významném rozdílu poté probíhá pomocí srovnání absolutní hodnoty testové statistiky  $|T|$  s hodnotou kvantilu ( 34 ) nebo pomocí výpočtu  $p$ -hodnoty ( 35 ) a srovnáním její hodnoty s hladinou testu  $\alpha$ .

Popsaný postup lze použít pouze, pokud hodnoty  $CV_1$  a  $CV_2$  spočtené pomocí vzorce ( 31 ) jsou **nižší než 0,05 až 0,1**. U hodnoty 0,1 je již ale nutné považovat výsledky za přibližné a nedávat jim takovou váhu.

Pokud do součinu ( 27 ) nebo ( 28 ) popisující dozimetrický řetězec vstupuje další veličina, která není uvedena ve vzorci, postup je stejný. Pokud patří mezi nesdílené veličiny, bude jednou z  $X_{ij}$  veličin ze vzorce ( 30 ) a její standardní relativní nejistota se zahrne do výpočtu pomocí vzorce ( 31 ).

### 7.2.4. Jednotlivé scénáře pro fotony

**Případ (a)**

$$X_i = M_i \prod_j k_{ij}, i = 1,2$$

$$CV_i = \sqrt{CV^2(M_i) + \sum_{j=1}^n CV^2(k_{ij}), i = 1,2.}$$

( 36 )

### Případ (b)

$$X_i = M_i N_i \prod_j k_{ij}, i = 1, 2$$
$$CV_i = \sqrt{CV^2(M_i) + CV^2(N_i) + \sum_{j=1}^n CV^2(k_{ij})}, i = 1, 2.$$

( 37 )

### Případ (c)

Tento případ je specifický v tom, že na rozdíl v absorbovaných dávkách má vliv pouze jedna veličina, která je nesdílená a to veličina  $M_i, i = 1, 2$ . Posouzení shody bude provedeno Z-testem:

$$T = \frac{M_1 - M_2}{\sqrt{s_{M_1}^2 + s_{M_2}^2}}$$

( 38 )

kde  $s_{M_i}$  značí standardní nejistotu  $M_i$ . Tu lze např. odhadnout z relativní standardní nejistoty vztahem  $s_{M_i} = M_i CV(M_i)$ . Posouzení shody proběhne stejně jako v předchozích případech pomocí ( 34 ) nebo výpočtem p-hodnoty ( 35 ) a jejím srovnáním s hladinou testu. Postup lze v tomto případě použít, i pokud je relativní standardní nejistota vyšší než 0,05 – 0,1. Je ale nutné ověřit, že rozdělení  $M_i$  je aspoň přibližně normální.

### Případ (d)

Tento případ se od (a) a (b) odlišuje v tom, že  $N_i$  nelze považovat čistě za sdílenou nebo za nesdílenou veličinu pro obě absorbované dávky. V této situaci jsme někde mezi těmito případy. Díky kalibraci ve stejné laboratoři budeme předpokládat, že nejistota  $N_i$  je pro oba řetězce (přibližně) shodná, tedy  $CV(N_1) = CV(N_2)$ , označme jako  $CV(N)$ . Rozptyl  $N_i$  označme jako  $\sigma_N^2$ . Pro dozimetrické řetězce uvažujme model

$$D_i = AN_i X_i, i = 1, 2,$$

( 39 )

kde stejně jako v obecném modelu pro (a) a (b) je  $A$  sdílená veličina, tedy pro tento konkrétní případ

$$A = k_{QQ_0}.$$

( 40 )

Veličiny

$$X_i = M_i \prod_j k_{ij}, i = 1, 2$$

( 41 )

jsou nesdílené veličiny a  $N_i$  jsou částečně sdílené. Předpokládáme, že podíl  $q$  z variability  $N_i$  (tj.  $q\sigma_N^2$ , resp.  $\sqrt{q}CV(N)$ ) je způsoben chybou kalibrační laboratoře, která je sdílená pro obě veličiny  $N_1, N_2$  a že

podíl  $1 - q$  variability  $N_i$  (tj.  $(1 - q)\sigma_N^2$ , resp.  $\sqrt{1 - q}CV(N)$ ) je nezávislá reziduální chyba určení hodnoty  $N_i$ . Pak

$$\sigma = \sqrt{2(1 - q)CV^2(N) + \log(1 + CV_1^2) + \log(1 + CV_2^2)}, \quad (42)$$

kde

$$CV_i = \sqrt{CV^2(M_i) + \sum_{j=1}^n CV^2(k_{ij})}, i = 1, 2. \quad (43)$$

Hodnocení shody se provede pomocí testové statistiky

$$T = \frac{\log(N_1) + \log(X_1) - (\log(N_2) + \log(X_2))}{\sigma} \quad (44)$$

a stejně jako v předchozích případech jejím dosazením do ( 34 ) nebo ( 35 ). Postup lze použít pokud  $CV_1, CV_2, CV(N) < 0,05$ .

#### 7.2.5. Postup pro jednotlivé scénáře pro elektrony

Postup je analogický postupu pro fotony. Veličina  $100\%/PDD_i$  je považována za nesdílenou, tedy vystupuje v obecných vzorcích ( 30 ) a ( 31 ) jako jedna z veličin  $X_{ij}$ .

Případ (c) se také musí řešit pomocí obecných vzorců ( 30 ) a ( 31 ) pro  $X_{i1} = M_i, X_{i2} = 100\%/PDD_i$ .

Případ (d) se řeší přidáním členů  $100\%/PDD_i$  do vzorce ( 41 ) a přičtením  $CV^2(100\%/PDD_i)$  pod odmocninou v ( 43 ).

Relativní standardní nejistota veličiny  $100\%/PDD_i$  byla v článku [20] odhadnuta pro nejistoty uvedené v TRS 398 jako 0,006.

#### 7.2.6. Rozdíly dávek

Článek Koniarová, Kotík [20] zahrnuje postup pro výpočet (relativního) rozdílu dávek, za kterým lze na hladině 5 % považovat rozdíl za významný. Pro nejistoty uvedené v Tabulce č. 22 jsou tyto relativní rozdíly uvedeny v Tabulce č. 24. Pro scénář (d) se uvažuje hodnota parametru  $q = 0,5$ . Tedy, že 50 % variability  $N_i$  je způsobeno efektem kalibrační laboratoře.

Tabulka č. 24: Meze pro rozdíly dávek v procentech, od nichž lze rozdíl na hladině významnosti  $\alpha = 0,05$  pro modely (a) až (d) považovat za významný. Pro případ (d) byl rozptyl  $N$  rozdělen v poměru 1:1 mezi chybu kalibrační laboratoře a chybu měření. Hodnoty jsou spočteny pro nejistoty uvedené v Tabulce č. 22.

| Případ                     | Rozdíly dávek pro fotony | Rozdíly dávek pro elektrony |
|----------------------------|--------------------------|-----------------------------|
| (a) 1 řetězec, měsíční ZPS | 2,5 %                    | 3,0 %                       |
| (b) 2 řetězce, 2 KL        | 3,1 %                    | 3,6 %                       |
| (c) 1 řetězec, denní ZPS   | 2,2 %                    | 2,8 %                       |
| (d) 2 řetězce, stejná KL   | 2,8 %                    | 3,3 %                       |

KL – kalibrační laboratoř

### 7.3 ILAC (popisuje-li specifikace interval s horní a dolní mezí)

Pro posouzení shody výsledku kvantitativního měření s požadavkem byl použit dokument [7] „ILAC-G8:03/2009 Pokyny k uvádění shody se specifikací“, konkrétně jeho český překlad vypracovaný ČIA. Číslo obrázku odpovídá číslu v původním dokumentu [7].

Kvantitativně vyjádřená tolerance určuje interval s horní a dolní mezí. Například v případě tolerance  $\pm 3 \%$  z referenční hodnoty bude platit vztah: *horní toleranční mez = referenční hodnota + 3 % z referenční hodnoty* a analogicky *dolní toleranční mez = referenční hodnota - 3 % z referenční hodnoty*. Pro interval vymezený horní a dolní toleranční mezí budeme dále používat název *toleranční rozmezí*.

Budeme-li pod pojmem „specifikace“ uvedeným ve zmíněném dokumentu ILAC rozumět pojem „toleranční rozmezí“ ve smyslu předchozího odstavce, je pak možné pro vyjádření shody či neshody použít formulací uvedených v tomto dokumentu ILAC.

Smyslem této kapitoly je poukázat na to, že při aplikaci pravidel uvedených v dokumentu ILAC-G8:03/2009 můžeme zhodnotit výsledek měření jako „vyhovuje“ pouze pro Případ 1 (viz schématický Obrázek II.1. níže, který znázorňuje změřené hodnoty, jejich rozšířené nejistoty a horní toleranční mez). Pro Případ 2 a Případ 3 není možné vyjádřit shodu ani neshodu a je nutné provést nové přesnější měření tak, že například použijeme přesnější měřicí přístroj, použijeme jiný měřicí přístroj, provedeme více měření apod. Případ 4 zhodnotíme jako „nevyhovuje“.

V Obrázku II.1. horizontální linie zobrazuje „Horní mez“, body s vertikálními úsečkami pak vyjadřují střední hodnoty měření (body) s intervalem odpovídajícím rozšířené nejistotě měření (vertikální úsečky), určujícím interval hodnot měřené veličiny obsahující skutečnou (pravou) hodnotu s pravděpodobností přibližně 95 %.

#### ILAC-G8:03/2009 Pokyny k uvádění shody se specifikací

Překlad ČIA - září 2009 [7]

Výňatky z dokumentu vypracovaného Accreditation Committee ILAC na podporu zkušebních a kalibračních laboratoří na celém světě při vyjadřování a uvádění shody se specifikací u kvantitativních měření, s cílem vyhovět požadavkům normy ISO/IEC 17025. Výklad je založen na předpokladu, že příslušný výsledek měření má v podstatě normální rozdělení.

#### 7.3.1 Uvádění shody se specifikací pro jednotlivou veličinu

Popisuje-li specifikace interval s horní a dolní mezí, pak by **vyjádření o shodě či neshodě mělo být vypracováno pouze tehdy, když poměr rozšířeného intervalu nejistoty ke specifikovanému intervalu je přiměřeně malý a vhodný pro daný účel** (to znamená, že daná laboratoř by měla být schopna splnit potřeby zákazníka).

Je-li dosažena shoda se specifikací, mělo by být zákazníkovi jasné, jaká pravděpodobnost pokrytí pro rozšířenou nejistotu byla použita. Obecně bude pravděpodobnost pokrytí 95 % a vyjádření bude obsahovat poznámku ve smyslu, že „*Vyjádření shody je založeno na pravděpodobnosti pokrytí 95 % pro rozšířenou nejistotu*“. To znamená pravděpodobnost, že dané měření je pod horní mezí specifikace, je vyšší než 95 %, tj. přibližně 97,5 % pro symetrická rozdělení. Obdobný závěr lze učinit pro dolní mez specifikace. Jiné hodnoty pravděpodobnosti pokrytí pro rozšířenou nejistotu by měly být dohodnuty mezi laboratoří a zákazníkem. Pro rozšířenou nejistotu mohou být zvoleny vyšší pravděpodobnosti pokrytí než 95 %, nižší hodnoty by ale neměly být používány.

Pro určitou horní mez specifikace je doporučován následující přístup. (Obdobný přístup se použije též pro dolní mez specifikace.):

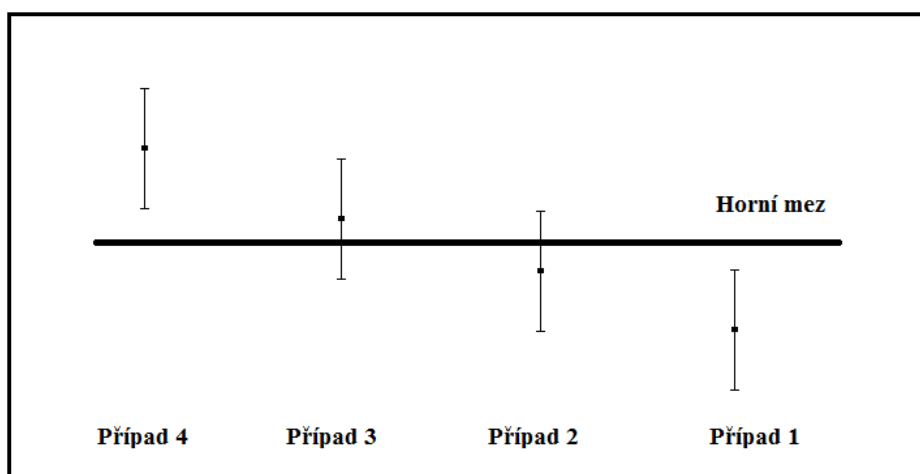
(a) **Shoda:** Jestliže mez daná specifikací není překročena výsledkem měření zvětšeným o rozšířenou nejistotu s pravděpodobností pokrytí 95 %, pak je možno vyjádřit shodu se specifikací (viz. Případ 1 z obr. II.1). To je možno vyjádřit jako „*Shoda*“ nebo „*Shoda – výsledek měření je v rámci meze dané specifikací (nebo pod mezí danou specifikací) bere-li se v úvahu nejistota měření*“. Při kalibraci je tento závěr často uváděn jako „*Vyhovuje*“;

(b) **Neshoda:** Jestliže je mez daná specifikací překročena výsledkem měření zmenšeným o rozšířenou nejistotu s pravděpodobností pokrytí 95 %, pak je možno vyjádřit neshodu se specifikací (viz. Případ 4 z obr. II.1). To je možno vyjádřit jako „*Neshoda*“ nebo „*Neshoda – výsledek měření je mimo mez danou specifikací (nebo nad mezí danou specifikací), bere-li se v úvahu nejistota měření*“. Při kalibraci je tento závěr často uváděn jako „*Nevyhovuje*“;

(c) Jestliže bude výsledek měření zvětšený/zmenšený o rozšířenou nejistotu s pravděpodobností pokrytí 95 % překrývat mezní hodnotu (viz. Případy 2 a 3 z obr. II.1), pak není možné vyjádřit shodu nebo neshodu. Výsledek měření a rozšířená nejistota s pravděpodobností pokrytí 95 % by pak měl být uveden spolu s vyjádřením naznačujícím, že nebyla prokázána ani shoda, ani neshoda. Vhodné vyjádření vztahující se na tyto situace by bylo „*Není možné vyjádřit shodu*“. V Případě 2 z obr. II.1 je možno naznačit, že dané měření je pod mezní hodnotou, použitím nějakého obdobného vyjádření jako „*Není možné vyjádřit shodu za použití pravděpodobnosti pokrytí 95 % pro rozšířenou nejistotu, přestože výsledek měření se nachází pod mezní hodnotou*“. Pokud budou uváděna kratší vyjádření, tak by neměla vzbuzovat dojem, že je daný výsledek ve shodě se specifikací.

Pokud je shoda se specifikací (pro horní mez) definována jako skutečnost, že naměřená hodnota je menší než mez daná specifikací, a výsledek měření je roven hodnotě meze dané specifikací, pak musí být vyjádřena neshoda. Obdobné ustanovení platí pro dolní mez.

Pokud budou vnitrostátní či jiné předpisy vyžadovat provedení rozhodnutí ohledně odmítnutí či schválení, může být Případ 2 z obr. II.1 vyjádřen jako shoda a Případ 3 z obr. II.1 jako neshoda s mezí danou specifikací.



Obrázek II.1: Shoda se specifikací pro horní mez. Vyjádření shody může být rozšířeno tak, aby explicitně vyjadřovalo, zda se shoda týká horní nebo dolní meze dané specifikací za použití pravděpodobnosti pokrytí 95 %.

### 7.3.2 Uvádění shody s požadavky nebo specifikacemi v případě několika veličin

Jestliže vyhodnocení shody se specifikací obsahuje více veličin (a/nebo měřených parametrů), měla by být každá naměřená hodnota vyhodnocována nezávisle. Výsledek každého vyhodnocení by měl být uveden tak, jak je popsáno v kapitole 7.3.1.

Celkové hodnocení shody s požadavky nebo specifikací může být zformulováno jedním ze tří následujících způsobů nebo jejich kombinací a může být zákazníkovi sděleno v určitém souhrnném vyjádření podle následujících příkladů:

(a) „Všechny naměřené hodnoty jsou ve shodě s mezí danou (mezemi danými) specifikací“ nebo „Položka/vzorek je ve shodě s požadavky“. To se vztahuje na situace, kdy všechna měření jsou ve shodě se specifikací (Případ 1 z obr. II.1).

(b) „Pro některé z naměřených hodnot není možné učinit vyjádření o shodě se specifikací.“ To se vztahuje na situace, kde některá z měření nevykazují ani shodu ani neshodu se specifikací (Případ 2 a 3 z obr. II.1).

(c) „Některé z naměřených hodnot nejsou ve shodě se specifikacemi“ nebo „Položka/vzorek není ve shodě s požadavky“. To se vztahuje na situace, kde jedno nebo více měření nejsou ve shodě se specifikacemi (Případ 4 z obr. II.1).

Jestliže je vypracováváno celkové hodnocení, pak by mělo zahrnovat vyjádření ohledně pravděpodobnosti pokrytí pro rozšířenou nejistotu, jako např. „Vyjádření shody se specifikací (nebo požadavkem) je založeno na pravděpodobnosti pokrytí 95 % pro rozšířenou nejistotu výsledků měření, na nichž je založeno rozhodnutí o shodě“. Vyjádření by mělo jasně uvádět, zda byly mezi laboratoří a zákazníkem dohodnuty jiné hodnoty pravděpodobnosti pokrytí pro rozšířenou nejistotu, jak je popsáno v 2. odstavci kapitoly 7.3.1.



## Přílohy:

### A. Rozšiřující výklad statistických a pravděpodobnostních pojmů použitých ve vztazích k výpočtu nejistot

Text neslouží jako přesný matematický výklad. Cílem textu není uvádět všechny detaily a předpoklady nutné k aplikaci popsaných metod. Text slouží hlavně pro základní shrnutí a poskytnutí základního přehledu o matematickém aparátu, který stojí za vztahy použitými v doporučení.

*Číslování obrázků a rovnic v této příloze se vztahuje pouze k této příloze.*

#### Obsah

1. Náhodná veličina
2. Rozdělení
3. Charakteristiky náhodných veličin
4. Významná rozdělení náhodných veličin
5. Důležité matematické nástroje, které hrají roli pro výpočet nejistot
6. Měřená hodnota
7. Odhady střední hodnoty, rozptylu, směrodatné odchylky, kovariance, korelace
8. Nejistota a termíny použité v doporučení
9. Odhad nejistoty
10. Nesymetrické rozdělení odhadu stanovované veličiny
11. Výpočet koeficientu korelace kermy a tloušťky filtru pro příklad 3.

#### Symbols

|                     |                          |
|---------------------|--------------------------|
| CLV                 | centrální limitní věta   |
| $CV$                | variační koeficient      |
| $E$                 | operátor střední hodnoty |
| $var$               | operátor rozptylu        |
| n. v.               | náhodná veličina         |
| $N(\mu, \sigma^2)$  | normální rozdělení       |
| $LN(\mu, \sigma^2)$ | lognormální rozdělení    |

1. Náhodná veličina (n. v.) je koncept z teorie pravděpodobnosti, který pravděpodobnostně popisuje možné hodnoty výsledků při opakování určitého experimentu, jehož přesný výstup nelze určit deterministicky.
2. Náhodnou veličinu  $X$  popisujeme jejím pravděpodobnostním rozdělením, které je v případě spojitých rozdělení určeno hustotou  $f$ . To je nezáporná funkce s hodnotou integrálu 1, která popisuje pravděpodobnost výskytu různých hodnot náhodné veličiny  $X$  a která umožňuje výpočet pravděpodobností různých jevů. Rozdělení diskrétní náhodné veličiny je určeno hodnotami  $k_i, p_i, i = 1, 2, \dots$ , kde  $k_i$  značí možné hodnoty náhodné veličiny a  $p_i$  značí pravděpodobnost, že veličina bude nabývat hodnoty  $k_i$ . V textu se budeme zabývat pouze spojitými veličinami. Obrázek 3 a Obrázek 4 ilustruje hustoty pro normální a lognormální rozdělení. Velikost hustoty v  $x$  je úměrná pravděpodobnosti výskytu této hodnoty. Přesněji řečeno plocha pod hustotou v intervalu  $[a, b]$  odpovídá pravděpodobnosti jevu, že hodnota náhodné veličiny  $X$  padne do tohoto intervalu.
3. Důležitými teoretickými charakteristikami náhodných veličin (n. v.) jsou:

- 3.1. Distribuční funkce n. v.  $X$ : Pro jednorozměrnou spojitou n. v.  $X$  a hodnotu  $x \in \mathbb{R}$  je definována jako  $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$  ( $P$  značí pravděpodobnostní míru). Vyjadřuje pravděpodobnost jevu, že n. v.  $X$  nabývá hodnot nižších než  $x$ .
- 3.2. Kvantilová funkce rozdělení n. v.  $X$ : Pro spojitou n. v.  $X$  je to funkce, která pro danou hodnotu  $p \in [0, 1]$  vrátí nejnižší možnou hodnotu  $q_p$  takovou, že platí  $F(q_p) = p$ . V případě, že  $F$  je ryze rostoucí funkce, je kvantilová funkce inverzní funkcí  $F^{-1}(p)$ . Jako  $p$ -kvantil nebo  $p100\%$  kvantil se pak označuje hodnota  $q_p$  z výše uvedeného vztahu. Jedná se o hodnotu, kde s pravděpodobností  $p$  bude hodnota n. v.  $X$  nižší než  $q_p$ . Mezi často používané kvantily patří  $q_{0,5}$ , nazývaný medián,  $q_{0,25}, q_{0,75}$ , nazývané 1. a 3. kvartil a  $q_{0,025}, q_{0,975}$ , které určují predikční interval, do kterého náhodná veličina padne s pravděpodobností 95 %.
- 3.3. Střední hodnota n. v.  $X$ : Pro spojitou n. v. je definována jako  $EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$  ( $E$  značí operátor střední hodnoty). Jedná se o obdobu váženého průměru všech hodnot, kde váhy jsou určeny pravděpodobnostmi výskytu hodnot.

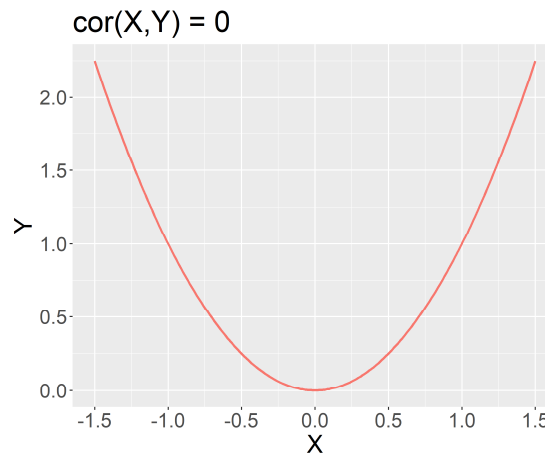
Střední hodnota je aditivní operátor. Mějme dvě n. v.  $X, Y$ , pak platí  $E(X + Y) = EX + EY$ . Dále platí pro konstantu  $a$ , že  $EaX = aEX$ .

Pozn. Střední hodnota je argumentem minima v parametru  $a$  střední kvadratické ztráty  $E(X - a)^2$ .

- 3.4. Rozptyl n. v.  $X$ : Pro spojitou n. v. je definován jako  $var(X) = E(X - EX)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 f(x)dx$  ( $var$  značí operátor rozptylu). Rozptyl je míra rozptýlení hodnot kolem střední hodnoty, která vyjadřuje, jak moc se možné hodnoty veličiny odchyľují od očekávaného výsledku.  
  
Pokud máme dvě navzájem stochasticky nezávislé n. v.  $X, Y$ , pak platí  $var(X + Y) = var(X) + var(Y)$ . Jsou-li veličiny závislé, pak  $var(X + Y) = var(X) + var(Y) + 2cov(X, Y)$ , kde  $cov(X, Y)$  je kovariance mezi  $X$  a  $Y$ , viz odstavec 3.7. Pro reálnou konstantu  $a$  platí  $var(aX) = a^2 var(X)$ .
- 3.5. Směrodatná odchylka n. v.  $X$ : Je definována jako odmocnina z rozptylu,  $sd(X) = \sqrt{var(X)}$ . Je ve stejných jednotkách jako původní veličina.

- 3.6. Variační koeficient n. v.  $X$ : Je definován pouze v případě, že  $EX \neq 0$  vztahem  $CV(X) = sd(X)/EX$ . Je to bezrozměrná charakteristika. Je používána jako relativní míra rozptýlení možných hodnot n. v.  $X$ .
- 3.7. Kovariance n. v.  $X, Y$ : Kovariance je míra lineární závislosti mezi dvěma n. v. Je definována jako  $cov(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)]$ . Jsou-li dvě n. v. stochasticky nezávislé, pak jejich kovariance je nulová (opak obecně platí pouze v případě normálního rozdělení). Pokud s rostoucí (resp. klesající) hodnotou jedné veličiny převažuje pravděpodobnost růstu (resp. poklesu) hodnot druhé veličiny, je kovariance kladná (resp. záporná).
- 3.8. Korelace n. v.  $X, Y$  (Pearsonův korelační koeficient): Korelace je normalizovaná míra lineární závislosti mezi dvěma n. v. Je definována jako  $cor(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{sd(X)sd(Y)}$ . Nabývá hodnot mezi -1 (hodnoty leží na přímce se zápornou směrnici) a 1 (hodnoty leží na přímce s kladnou směrnici). Jsou-li dvě n. v. stochasticky nezávislé, pak je korelace mezi nimi nulová.

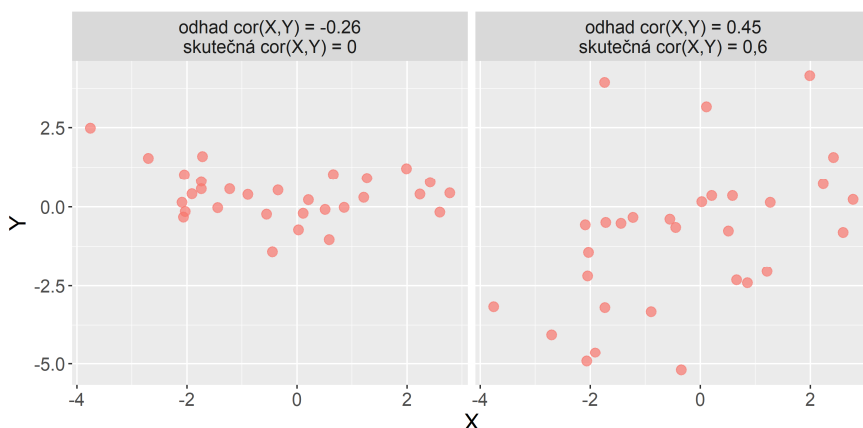
3.8.1. Stochasticky nezávislé n. v. mají nulovou korelaci (resp. kovarianci). Naopak to platí pouze v případě normálního rozdělení veličin. Korelaci tedy nelze přímo považovat za míru závislosti. Je to míra lineární závislosti. Obrázek 1 ilustruje situaci, kdy  $X$  má



Obrázek 1 Nulová korelace dvou závislých veličin.

normální rozdělení  $N(0, \sigma^2)$  a  $Y = X^2$ . Veličiny  $X, Y$  jsou tedy stochasticky závislé. Korelace mezi nimi je ovšem nulová.

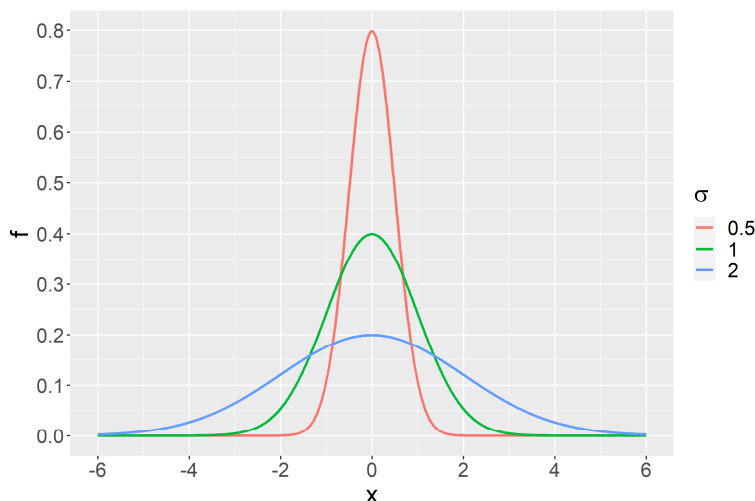
3.8.2. „Veličiny jsou korelované“: Je vhodné se vyvarovat použití často používaného spojení, že veličiny nebo jevy jsou korelované. Statistický výklad tohoto tvrzení je, že mezi veličinami je prokazatelně nenulová korelace. A to je často v rozporu s tím, jak tento pojem vnímá obecná populace. Velmi nízká, ale nenulová, hodnota korelace může mít nulový praktický význam. Naopak i vyšší hodnota korelace nutně neznamená, že z hodnot jedné veličiny lze přesněji odhadnout hodnoty veličiny druhé. Tuto situaci ilustruje Obrázek 2 (pravý panel). Často je také kladen důraz na numerickou hodnotu korelace odhadnuté z dat bez posouzení, zda lze tuto hodnotu považovat za statisticky významně nenulovou. Obrázek 2 také ilustruje rozdíly mezi teoretickou hodnotou korelace a hodnotou jejího odhadu z dat. Odhad korelace, tj. hodnota korelace odhadnutá z dat, má také svoji „nejistotu“. Nenulová hodnota odhadu korelace spočtené z dat nemusí nutně znamenat, že veličiny jsou „korelované“. Může to být pouze vliv náhody. Ve skutečnosti bude odhad korelace z dat vycházet vždy (až na nepodstatné výjimky) nulový. Obdobně pak konkrétní numerická hodnota odhadu nemusí znamenat, že skutečná hodnota je taková. Obrázek 2 ilustruje tyto situace.



Obrázek 2 Srovnání skutečné hodnoty korelace (tj. teoretická hodnota korelace mezi náhodnými veličinami  $X$  a  $Y$ ) a jejího odhadu z dat (odhad ze série měření  $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ ).

#### 4. Mezi významná rozdělení náhodných veličin patří:

4.1. **Normální rozdělení:** n. v.  $X$  má normální rozdělení se střední hodnotou  $EX = \mu$  a rozptylem  $var(X) = \sigma^2$ , pokud má hustotu  $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ . Toto rozdělení se označuje jako  $N(\mu, \sigma^2)$ . Parametry  $\mu$  a  $\sigma^2$ , resp.  $\sigma$ , jsou jedinými parametry tohoto rozdělení. Normální rozdělení je symetrické kolem své střední hodnoty  $\mu$  a tato hodnota je zároveň i mediánem n. v.  $X$ . Obrázek 3 ukazuje normální rozdělení pro různé hodnoty parametru  $\sigma$ . Změna parametru  $\mu$  způsobí pouze posun křivky.



Obrázek 3 Hustota normálního rozdělení s nulovou střední hodnotou a třemi různými hodnotami parametru  $\sigma$  (směrodatná odchylka).

Normálním rozdělením lze popsat mnoho reálných jevů. Důvodem je především centrální limitní věta – standardizovaný součet náhodných veličin konverguje s rostoucím počtem sčítaných veličin za poměrně obecných podmínek k normálnímu rozdělení. Nicméně je chybou ho automaticky předpokládat pro popis každého náhodného děje.

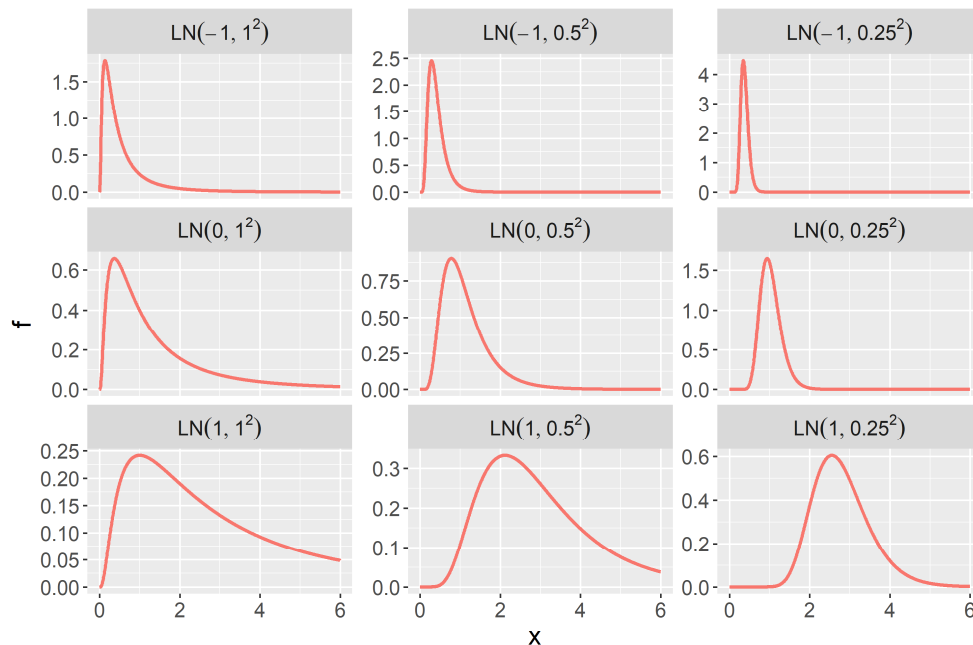
Součet n. v. s normálním rozdělením, má také normální rozdělení

4.2. **Lognormální rozdělení:** předpokládejme veličinu  $X$  s rozdělením  $N(\mu, \sigma^2)$ , pak veličina  $Y = \exp(X)$  má lognormální rozdělení s parametry  $\mu, \sigma^2$ , ozn.  $LN(\mu, \sigma^2)$ . Veličina s tímto rozdělením nabývá pouze kladných hodnot. Rozdělení není symetrické kolem žádné hodnoty. Platí  $EY = \exp(\mu + \sigma^2/2)$  a  $var(Y) = (\exp(\sigma^2) - 1)\exp(2\mu + \sigma^2)$ . Mediánem  $LN(\mu, \sigma^2)$

je hodnota  $\exp(\mu)$ . Ukázka hustoty lognormálního rozdělení pro různé hodnoty parametrů je na Obrázek 4.

Lognormálním rozdělením lze za poměrně obecných podmínek aproximovat součin náhodných veličin.

Součin n. v. s lognormálním rozdělením má lognormální rozdělení.



Obrázek 4 Ukázka lognormálního rozdělení pro různé hodnoty parametrů.

- 4.3. **Spojité rovnoměrné rozdělení:** n. v.  $X$  má spojité rovnoměrné rozdělení na intervalu  $[a, b]$  pokud platí  $f(x) = 1/(b - a)$  pro  $x \in [a, b]$  a  $f(x) = 0$  pokud  $x \notin [a, b]$ . Platí  $EX = (a + b)/2$  a  $var(X) = (b - a)^2/12$ .

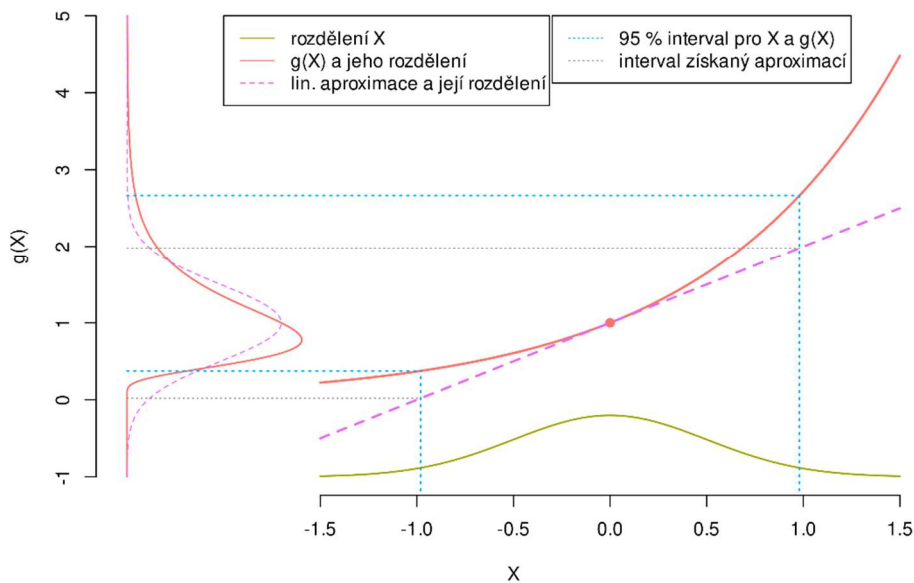
Spojité rovnoměrné rozdělení má např. chyba způsobená zaokrouhlováním. Často je také předpokládáno jako rozdělení veličiny, o které nemáme žádnou informaci ve smyslu, že žádná hodnota z intervalu  $[a, b]$  není preferována nad ostatními hodnotami, což v praxi nebývá příliš časté.

5. Důležité matematické nástroje, které hrají roli pro výpočet nejistot:

- 5.1. **Lineární aproximace funkce pro aproximaci rozptylu n. v. (propagace chyby):** Předpokládejme n. v.  $X$  se střední hodnotou  $\mu$  a rozptylem  $\sigma^2$ . Uvažujme transformaci  $g$ , (transformací se rozumí funkční vztah pro n. v.  $X$ , označený písmenem  $g$ ), která je na okolí  $\mu$  prostá a diferencovatelná. Zajímáme se o rozptyl veličiny  $Y = g(X)$ . Veličinu  $Y$  lze aproximovat pomocí lineární transformace  $X$  vztahem  $Y = g(X) \cong g(\mu) + g'(\mu)(X - \mu)$ , pokud se s velkou pravděpodobností její hodnoty vyskytují v okolí  $\mu$ , kde není velký odklon funkce  $g$  od linearity. Pak lze rozptyl  $Y$  aproximovat pomocí  $var(g(X)) \cong (g'(\mu))^2 \sigma^2$ . Aproximace to však může být velmi hrubá. Tato aproximace, a její vícerozměrná verze, je základním stavebním kamenem všech inženýrských výpočtů nejistot.

Obrázek 5 ilustruje aproximaci n. v.  $Y = \exp(X)$ , kde  $X$  má normální rozdělení (zelená křivka). Transformace  $\exp(X)$  je zobrazena červenou křivkou ve středu grafu. Rozdělení aproximace je zobrazeno červenou křivkou podél osy  $y$ . Přerušovaná modrá čára značí 95% predikční interval pro  $X$  (čáry kolmo k ose  $x$ ) a pro  $g(X)$  (čáry rovnoběžné s osou  $x$ ). Pro n. v.  $X$  je tento

interval přibližně  $\mu \pm 2\sigma$ . Rozdělení transformované veličiny je nesymetrické. Optimální interval s pokrytím 95 % je značně posunut od intervalu, který vznikne pomocí aproximace:  $g(\mu) \pm 2 \exp(\mu) \sigma$ . V této situaci tedy inženýrský přístup k nejistotě může vést k velmi zavádějícím výsledkům, protože  $g(\mu) \pm 2 \exp(\mu) \sigma$  nemá předpokládané pokrytí a dokonce zasahuje do míst, kde je pravděpodobnost výskytu hodnot téměř nulová. Příklad je konstruován pro  $X$  s rozdělením  $N(0, 0,5)$ . V této konkrétní situaci také odhad rozptylu pomocí aproximace bude o přibližně 30 % podhodnocovat skutečný rozptyl, což opět může vést k zavádějícím výsledkům, pokud by se takový odhad použil jako odhad jedné ze vstupních dílčích nejistot nějaké složitější transformace vstupních veličin.



Obrázek 5 Srovnání skutečného rozdělení  $g(X)$  a rozdělení pomocí aproximace. Modrá horizontální čára značí optimální 95 % predikční interval pro  $g(X)$ . Šedá přerušovaná čára značí interval založený na aproximaci, tedy interval  $\pm 2 sd$ , kde  $sd$  je odhad získaný aproximací.

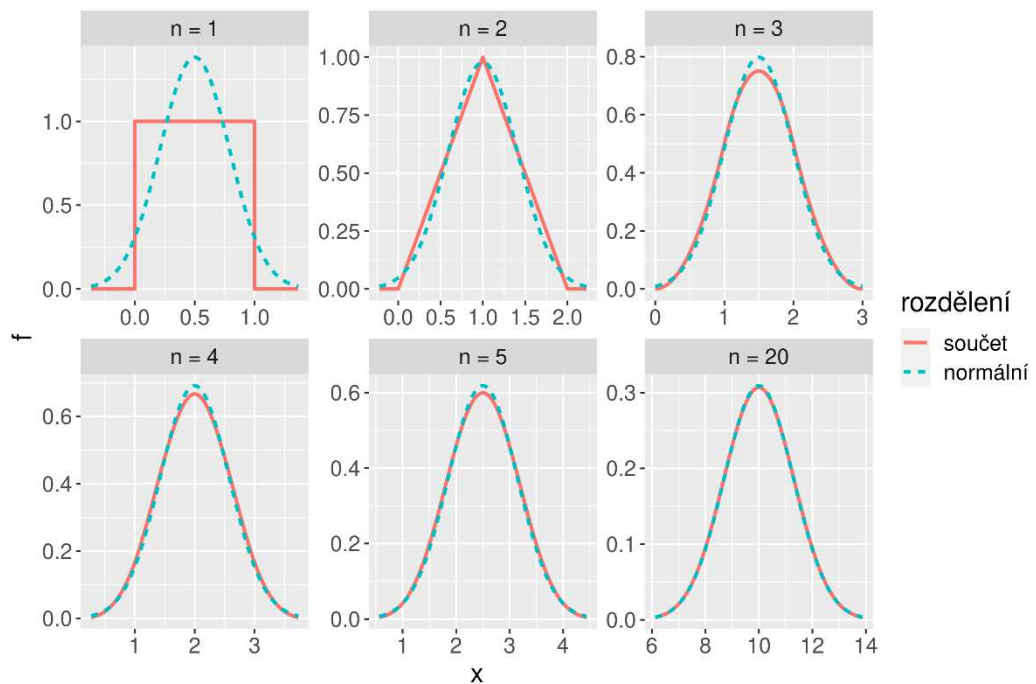
5.2. Zákon velkých čísel: Mějme posloupnost stochasticky nezávislých stejně rozdělených  $n$ . v.  $X_1, X_2, X_3, \dots$  s konečnou střední hodnotou  $\mu$ . Pak průměr

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

(A1)

konverguje s  $n \rightarrow +\infty$  k hodnotě  $\mu$ .

5.3. Centrální limitní věta (CLV): Mějme posloupnost stochasticky nezávislých stejně rozdělených  $n$  v.  $X_1, X_2, X_3, \dots$  s konečnou střední hodnotou  $\mu$  a rozptylem  $\sigma^2$ . Pak rozdělení  $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)$  konverguje k rozdělení  $N(0, \sigma^2)$ .



Obrázek 6 Ilustrace CLV. Aproximace součtu náhodných veličin s rovnoměrným rozdělením k normálnímu rozdělení.

Obrázek 6 ilustruje konvergenci k normálnímu rozdělení pro součet veličin s rovnoměrným rozdělením na intervalu  $[0, 1]$ . Přerušovaná modrá čára značí hustotu rozdělení součtu, červená hustota značí hustotu normálního rozdělení, kterou je rozdělení součtu aproximováno.

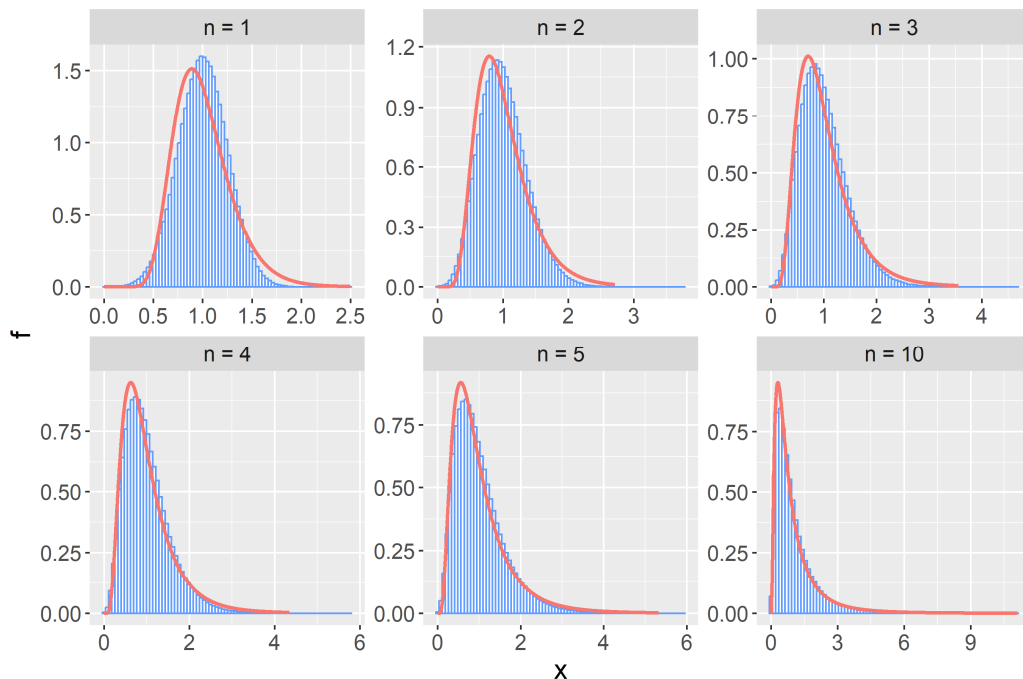
5.3.1. CLV je základem pro častý předpoklad normality, protože mnoho v praxi se vyskytujících veličin lze popsat jako součet více dílčích veličin. Naopak ale mnoho veličin nelze uvažovat jako součet a automatický předpoklad normality může vést k silně zavádějícím výsledkům. Často je také chybně zaměňována směs více rozdělení (např. smíchání více různých populací dohromady) za rozdělení součtu veličin, kde obecně neplatí, že s rostoucím počtem smíchaných rozdělení konverguje směs k normálnímu rozdělení.

5.3.2. Rozdělení  $\bar{X}_n$  lze pro dostatečně velké  $n$  aproximovat pomocí  $N(\mu, \sigma^2/n)$ .

5.3.3. Rozdělení  $\sum_{i=1}^n X_i$  lze pro dostatečně velké  $n$  aproximovat pomocí  $N(n\mu, n\sigma^2)$ .

5.3.4. CLV má i obecnější znění, kdy např. veličiny nemají stejné rozdělení (Linderbergova CLV, Lyapunovova CLV) a také na situace, kdy mezi veličinami existuje závislost.

5.4. Konvergence součinu veličin k lognormálnímu rozdělení (multiplikativní CLV): Mějme posloupnost stochasticky nezávislých stejně rozdělených a kladných n. v.  $X_1, X_2, X_3, \dots$  takových, že  $\log(X_i)$  má konečnou střední hodnotu  $\mu$  a rozptyl  $\sigma^2$ . Pak lze pro dostatečně velké  $n$  aproximovat rozdělení součinu  $\prod_{i=1}^n X_i$  rozdělením  $\text{LN}(n\mu, n\sigma^2)$ .



Obrázek 7 Histogram součinu  $n$  veličin s  $N(1, 0,25)$  rozdělením a lognormální rozdělení (červeně), které by se hypoteticky dalo k použití k aproximaci rozdělení součinu.

Obrázek 7 ilustruje konvergenci rozdělení součinu  $n$  v. k lognormálnímu rozdělení, kde je pro různá  $n$  zobrazené nasimulované rozdělení součinu  $n$  v. s rozdělením  $N(0, 0,25)$  (modrý histogram). Červeně je pak zobrazena hustota odpovídajícího lognormálního rozdělení, kterým je rozdělení součinu aproximováno.

5.4.1. Mnoho jevů (např. fyzikálních) a veličin lze popsat jako součin veličin. Předpoklad lognormálního rozdělení tedy může být pro mnoho jevů přirozený.

5.4.2. Multiplikativní CLV má i obecnější znění např. pro veličiny, které nemají stejné rozdělení.

5.5. Konvergence standardizované transformované veličiny: Předpokládejme n. v.  $X_\sigma$  takovou, že rozdělení n. v.  $(X_\sigma - \mu)/\sigma$  konverguje s  $\sigma \rightarrow 0 +$  k nějakému rozdělení  $L$  s nulovou střední hodnotou a jednotkovým rozptylem. Uvažujme transformaci  $g$ , která je na okolí  $\mu$  prostá a diferencovatelná, pak rozdělení veličiny

$$\frac{g(X_\sigma) - g(\mu)}{g'(\mu)\sigma}$$

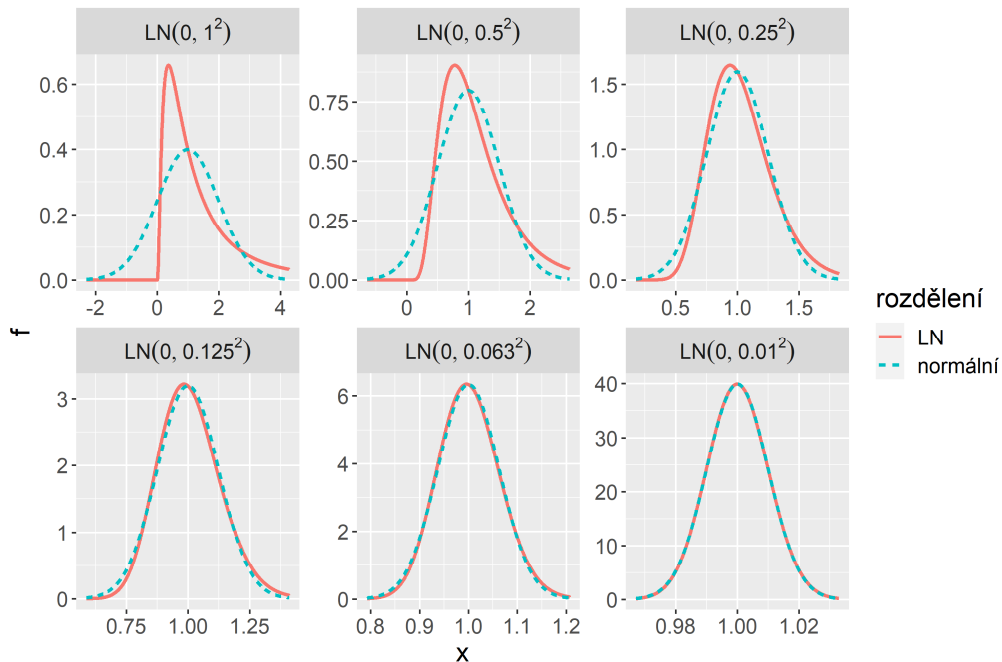
(A2)

za poměrně obecných podmínek s  $\sigma \rightarrow 0 +$  konverguje k rozdělení  $L$ .

5.5.1. Tuto vlastnost lze použít k aproximaci rozdělení veličiny  $g(X_\sigma)$ , viz odstavec 5.5.2. Vztah je založen na lineární aproximaci veličiny (aproximaci ilustruje Obrázek 5) a tedy pro vyšší hodnoty  $\sigma$  může vést jeho použití k zavádějícím výsledkům.



5.5.2. Pokud má n. v.  $X_\sigma$  rozdělení  $N(\mu, \sigma^2)$  a  $g(x) = \exp(x)$ , pak  $g(X_\sigma)$  má rozdělení  $LN(\mu, \sigma^2)$ . Dále platí, že pro malé  $\sigma$  lze rozdělení  $g(X_\sigma)$ , tedy rozdělení  $LN(\mu, \sigma^2)$  aproximovat pomocí rozdělení  $N(\exp(\mu), (\exp(\mu))^2 \sigma^2)$ . Situaci ilustruje Obrázek 8.



Obrázek 8 Aproximace lognormálního rozdělení pomocí normálního rozdělení.

V tomto konkrétním případě lze pro  $\sigma = 0,05$  (též  $CV(g(X_\sigma)) = 0,05$ ) považovat aproximaci za dostatečně přesnou pro většinu běžných aplikací (vzdálenost 2,5 a 97,5 % kvantilů lognormálního rozdělení a normálního rozdělení je nižší než 0,5 %). Pro aplikace, které vyžadují vyšší přesnost, lze použít kritérium  $CV(g(X_\sigma)) = 0,01$ .

- 5.6. Delta metoda: Předpokládejme posloupnost n. v.  $X_1, X_2, X_3, \dots$  takovou, že rozdělení  $\sqrt{n}(X_n - \mu)$  konverguje k rozdělení  $N(0, \sigma^2)$ . Uvažujme transformaci  $g$ , která je na okolí  $\mu$  prostá a diferencovatelná, pak rozdělení veličiny  $\sqrt{n}(g(X_n) - g(\mu))$  konverguje k rozdělení  $N(0, (g'(\mu))^2 \sigma^2)$ .
- 5.7. Vlastnosti z předchozích odstavců lze zobecnit pro vícerozměrné náhodné vektory.
- 5.8. Definice pojmu konvergence z předchozích vět je nad rámec tohoto textu. Pro praktické aplikace ovšem stačí nahradit slovo „konvergence“ za spojení „lze za daných podmínek aproximovat“.
- 5.9. Rychlost konvergence závisí na mnoha faktorech (např. na rozdělení veličin). Nelze pronést nějaké univerzálně platné pravidlo, že od určitého počtu nebo hodnoty parametru lze aproximaci použít.
- 5.10. I vizuálně malá odchylka v použitých aproximacích může vést k zavádějícím výsledkům. Mnoho jevů je posuzováno s připuštěním malé pravděpodobnosti chyby, typicky 5 % nebo 1 %. Běžně se tedy okrajové hodnoty označují za hodnoty, které jsou nestandardní, které nesou znak systematického odchýlení od žádaného stavu. I vizuálně podobné grafy hustot mohou pak vést pro tyto okrajové hodnoty k zásadním rozdílům v interpretaci výsledků.

6. Měřenou hodnotu uvažujeme jako náhodnou veličinu. Častým modelem je, že měřenou veličinu uvažujeme jako

$$X = \mu + \varepsilon$$

( A3 )

kde  $\mu \in \mathbb{R}$  je střední hodnota n. v.  $X$ , která zároveň představuje skutečnou hodnotu měřené veličiny, a  $\varepsilon$  je náhodná chyba (např. chyba měření, nesystematická chyba způsobená působením nepozorovaných vlivů apod.) s normálním rozdělením  $N(0, \sigma^2)$ . Pro n. v.  $X$  pak platí, že má rozdělení  $N(\mu, \sigma^2)$ .

7. Měřením se snažíme odhadnout skutečnou hodnotu  $\mu$  měřené veličiny. Předpokládejme, že máme několik navzájem stochasticky nezávislých realizací měření  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , kde jednotlivá  $X_i$  mají stejné rozdělení se střední hodnotou  $\mu$  a rozptylem  $\sigma^2$ .

- 7.1. Často používaným odhadem střední hodnoty je aritmetický průměr

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

( A4 )

Aritmetický průměr je také náhodná veličina. Střední hodnota průměru je  $\mu$  (tzv. nestranný / nevychýlený odhad), rozptyl průměru je  $\sigma^2/n$  a směrodatná odchylka průměru je  $\sigma/\sqrt{n}$ .

- 7.2. Jako odhad rozptylu lze použít veličinu

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

( A5 )

Tento odhad je, stejně jako průměr, náhodnou veličinou. Odhad je nestranný, tj.  $ES^2 = \sigma^2$  (platí bez ohledu na rozdělení veličin  $X_i$ ). Odhad  $S^2$  je někdy také označován jako výběrový rozptyl i když formálně toto označení není úplně správné (nesplňuje vlastnosti, které má rozptyl splňovat).

- 7.3. Jako odhad směrodatné odchylky lze použít odmocninu z odhadu rozptylu. Tedy veličinu

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}.$$

( A6 )

Tento odhad není obecně nestranný, tedy jeho střední hodnota je obecně různá od parametru  $\sigma$ . Odhad je někdy také označován jako výběrová směrodatná odchylka i když formálně toto označení není úplně správné.

- 7.4. Jako odhad rozptylu průměru ( A4 ) lze použít  $S^2/n$  a jako odhad směrodatné odchylky průměru lze použít  $S/\sqrt{n}$ .

- 7.5. V případě, že není k dispozici více měření (např. v případě laboratorního stanovení hodnoty), se jako odhad střední hodnoty  $\mu$  použije přímo stanovená hodnota  $X_1$ .
- 7.6. Odhad kovariance: Uvažujme, že namísto měření jedné veličiny, měříme veličiny dvě. Máme tedy sérii stochasticky nezávislých dvojic  $(X_i, Y_i), i = 1, \dots, n$ . Dále uvažujeme, že  $X_i$  a  $Y_i$  mají kovarianci  $cov(X_i, Y_i) = \xi$  (může být i nulová). Pro odhad kovariance lze použít veličinu  $Q$ :

$$Q = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}),$$

( A7 )

kde  $\bar{X}, \bar{Y}$  značí průměry ze vzorce ( A4 ).

- 7.7. Odhad korelace: Korelaci lze pro dvojice měřených hodnot odhadnout jako:

$$R = \frac{Q}{S_X S_Y},$$

( A8 )

kde  $S_X, S_Y$  značí odhady směrodatných odchylek pro  $X_i, i = 1, \dots, n$  a  $Y_i, i = 1, \dots, n$  (viz vzorec ( A6 )) a  $Q$  značí odhad kovariance ( A7 ). Obrázek 2 ilustruje odhady korelace z dat ve srovnání s teoretickou hodnotou korelace.

8. Nejistota je dle metrologického slovníku (jakýkoliv) „nezáporný parametr charakterizující rozptýlení hodnot veličiny přiřazených k měřené veličině na základě použité informace“. Definice nejistoty neobsahuje žádný konkrétní parametr nebo míru rozptýlení hodnot a nerozlišuje mezi odhadem parametru a hodnotou parametru.

Předpokládejme n. v.  $X$  se střední hodnotou  $\mu$  a rozptylem  $\sigma^2$ . Veličina  $X$  může zastupovat výsledek jednoho měření, nebo odhad (např. průměr) skutečné hodnoty nějakého parametru. Veličinu lze přepsat do tvaru ( A3 ) jako  $X = \mu + \varepsilon$ , kde  $\varepsilon$  je n. v. s nulovou střední hodnotou a rozptylem  $\sigma^2$ . N. v.  $\varepsilon$  pak může zastupovat chybu spojenou s měřením nebo odhadem skutečné hodnoty parametru  $\mu$  (např. chyba spojená s určením hodnoty nějakého fyzikálního parametru).

V doporučení jsou použity následující termíny pro nejistotu:

- 8.1. Standardní nejistota: Pro n. v.  $X$  (odhad parametru  $X$ , výsledek měření  $X$ ) a pro chybu  $\varepsilon$  spojenou s určením hodnoty  $\mu$  je za standardní nejistotu označována směrodatná odchylka  $\sigma$  nebo odhad směrodatné odchylky  $S$  nebo jakýkoliv jiný odhad směrodatné odchylky (včetně informace o hodnotě směrodatné odchylky). Standardní nejistota se často značí symbolem  $u$ .

Př. 1. V případě  $n$  stochasticky nezávislých realizací měření  $X_1, X_2, \dots, X_n$  je jako odhad parametru  $\mu$  použit aritmetický průměr ( A4 ). Jako standardní nejistota tohoto odhadu je často uvažován odhad směrodatné odchylky průměru  $S/\sqrt{n}$ , kde  $S$  je definováno vztahem ( A6 ).

Př. 2. V případě laboratorního stanovení veličiny se skutečnou hodnotou  $\mu$  se za standardní nejistotu často označuje hodnota (odhadu) parametru  $\sigma$ , kterou uvádí v protokolu laboratoř jako standardní nejistotu pro chybu stanovení  $\varepsilon$ . Pokud laboratoř uvádí relativní standardní nejistotu, standardní nejistota se vypočte jako součin relativní standardní nejistoty a laboratorně stanovené hodnoty. Pozn. Je nutné se ujistit, že laboratoř standardní nejistotou označuje odhad parametru  $\sigma$ .

- 8.2. Relativní standardní nejistota: Jedná se o standardní nejistotu vztaženou k hodnotě měřené veličiny.

Pro n. v.  $X$  (odhad parametru  $X$ , výsledek měření  $X$ ) je jako relativní standardní nejistota často označován variační koeficient  $CV(X)$  nebo jakýkoliv jeho odhad.

Pro chybu měření  $\varepsilon$  je nejistota vztažená k hodnotě měřené veličiny ( $\mu$ ). Jako relativní standardní nejistota je často označován podíl nebo jakýkoliv odhad podílu směrodatné odchylky  $\sigma$  a skutečné hodnoty  $\mu$  měřené veličiny  $X$ . Relativní standardní nejistota je často značena symbolem  $u_r$ . (V textu doporučení se relativní standardní nejistota označuje písmenem  $w$ .)

Př. 1. V případě  $n$  stochasticky nezávislých realizací měření  $X_1, X_2, \dots, X_n$  je jako relativní standardní nejistota často označován odhad variačního koeficientu průměru,  $\frac{s}{\bar{X}\sqrt{n}}$ , kde veličiny ve vzorci jsou definovány v rovnicích ( A4 ) a ( A6 ).

Př. 2. V případě laboratorního stanovení veličiny se skutečnou hodnotou  $\mu$  se za standardní nejistotu často označuje hodnota (odhadu) parametru  $\sigma$ , kterou uvádí v protokolu laboratoř jako standardní nejistotu pro chybu stanovení  $\varepsilon$ , vydělená laboratorně stanovenou hodnotou. Tedy jako  $s/X$ , kde  $s$  je laboratořím udávaný odhad parametru  $\sigma$  a  $X$  je stanovená hodnota v laboratoři. Takový odhad nemusí být příliš spolehlivý (bude mít vysokou nejistotu), pokud je relativní standardní nejistota vysoká (přesněji: pokud je teoretický variační koeficient vysoký).

- 8.3. Rozšířená nejistota, resp. rozšířená relativní nejistota jsou definované jako standardní nejistota, resp. relativní standardní nejistota, vynásobená koeficientem rozšíření  $k$ . Hodnotu koeficientu rozšíření je vždy nutné uvést. Častou volbou hodnoty koeficientu rozšíření je  $k = 2$  a  $k = 3$ . Označíme-li nejistotu (standardní nejistotu nebo relativní standardní nejistotu) jako  $u$ , pak  $X \pm ku$  v případě normálního rozdělení  $X$  pokryje s pravděpodobností pro  $k = 2$  (resp.  $k = 3$ ) přibližně 95 % (resp. 99,7 %) skutečnou hodnotu  $\mu$ . Poznamenejme, že pro jiné než normální rozdělení toto pokrytí obecně neplatí. Pro  $k = 1$  bude v případě normálního rozdělení pokrytí přibližně 68 %.

- 8.4. Nejistota typu A: Označuje nejistotu (standardní nebo relativní standardní), která je určena statistickým zpracováním hodnot, které jsou získané za stejných podmínek. K odhadu nejistoty se většinou používají postupy z odstavce 7.

- 8.5. Nejistota typu B: Označuje nejistotu (standardní nebo relativní standardní), která je určena jinak než základě statistického zpracování dat. Pro její odhad lze použít více zdrojů, jako jsou údaje výrobce měřicího přístroje, údaje z měřicí laboratoře, odborný odhad apod. Častý předpoklad je, že stanovovaná hodnota splňuje model ( A3 ), kde hodnota parametru  $\sigma$  je určena jinak než na základě statistického zpracování.

Chyba charakterizovaná nejistotou typu B je často sdílená napříč opakovanými realizacemi měření. Např. chyba v kalibraci měřicího zařízení bude sdílená pro všechna měření daným zařízením. Možný matematický model pro tuto situaci může být  $X_i = \mu + c + \varepsilon_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , kde  $X_i$  je výsledek  $i$ -tého měření,  $\mu$  je skutečná hodnota měřené veličiny,  $c$  je náhodná odchylka daného měřicího přístroje od měřené hodnoty (chyba kalibrace, která je sdílena pro všechna  $i$ ) s nulovou střední hodnotou a rozptylem  $\sigma_c^2$ ,  $\varepsilon_i$  je náhodná chyba měření  $i$  s nulovou střední hodnotou a rozptylem  $\sigma^2$ .

- 8.6. Matematický přístup pro práci s nejistotou typu A a typu B je stejný. V obou případech se předpokládá, že měření / stanovovaná hodnota jsou náhodnými veličinami.

8.7. Odhad nejistot, resp. v praxi uváděné nejistoty, mají svou nejistotu, a tedy jejich numerické hodnoty nemusí reprezentovat skutečnou hodnotu nejistoty.

9. Při stanovení nějaké veličiny nebo charakteristiky bychom měly mimo jejího odhadu uvést i odhad nejistoty této veličiny. Stanovovaná veličina nebo charakteristika může být měřena přímo nebo může vzniknout jako hodnota funkce, do které vstupují jednotlivé dílčí veličiny  $X_1, X_2, \dots, X_p$ , které jsou zatížené chybou. Uvažujeme  $EX_i = \mu_i$  a  $var(X_i) = \sigma_i^2$ . Obecný model je  $X = g(X_1, X_2, \dots, X_p)$ , kde  $X$  je stanovovaná veličina (výstupní měřená veličina) a  $g$  je funkce popisující vztah mezi vstupními veličinami a stanovovanou veličinou (v textu doporučení označovaná písmenem  $f$ ). Každé  $X_i$  je uvažováno jako n. v. s rozdělením daným hustotou  $f_i$  (hustoty pro jednotlivá  $X_i$  se uvažují jako obecně různé). Častým předpokladem je, že  $X_i$  jsou navzájem stochasticky nezávislé a že se řídí normálním rozdělením  $N(\mu_i, \sigma_i^2)$ .

Jako odhad střední hodnoty se používá přímo hodnota  $X$ . Často používaná aproximace (vícerozměrná verze aproximace popsané v odstavci 5.1) pro  $sd(X)$ , tedy standardní nejistotu  $X$ , je v případě stochastické nezávislosti vstupních veličin:

$$u = \sqrt{\left(\frac{dg}{dx_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{dg}{dx_2}\right)^2 \sigma_2^2 + \dots + \left(\frac{dg}{dx_p}\right)^2 \sigma_p^2.}$$

(A9)

Tato aproximace je založena na lineární aproximaci funkce  $g$  a tedy, pokud mají vstupní veličiny vyšší nejistoty (s ohledem na nelinearitu funkce  $g$  v oblasti výskytu hodnot vstupních veličin), mohou být výsledky aproximace nepřesné.

Pokud vstupní veličiny  $X_1, X_2, \dots, X_p$  mají normální rozdělení, nebo přibližně normální rozdělení a zároveň pokud jsou všechny nejistoty vstupních veličin velmi malé (s ohledem na nelinearitu funkce  $g$  v oblasti výskytu hodnot vstupních veličin), lze považovat rozdělení  $X$  za přibližně normální, viz odstavec 5.1. V praxi ale tyto předpoklady nemusí platit. Např. pokud jsou nejistoty relativně vysoké, pak rozdělení  $X$  nelze spolehlivě aproximovat normálním rozdělením. V takové situaci mohou být interpretace spojené se standardní nejistotou (např. pokrytí z odstavce 8.3) zavádějící.

Př. 1. série stochasticky nezávislých měření: Uvažujeme  $X_i, i = 1, \dots, n$  na sobě stochasticky nezávislá měření stejného parametru, která se řídí stejným rozdělením. Nechť platí  $EX_i = \mu$  a  $var(X_i) = \sigma^2$ . Odhad se provede pomocí průměru, tedy funkce  $g$  je definována jako průměr:  $g(X_1, X_2, \dots, X_n) = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ . Standardní nejistota a relativní standardní nejistota je stanovena pomocí vzorců v části 7 (7.3 a 7.4).

Rozdělení průměru veličin konverguje k normálnímu rozdělení, i když vstupní veličiny nejsou normálně rozdělené, viz odstavec 5.3. Konvergence k normálnímu rozdělení je pro velkou škálu rozdělení poměrně rychlá. Tedy hodnoty pokrytí z odstavce 8.3 přibližně platí pro mnoho reálných situací.

Př. 2. model pro absorbovanou dávku: Předpokládejme model  $D = MN_D k_{q,q_0} K$ . Předpokládejme, že veličina  $M$  má rozdělení  $N(\mu_M, \sigma_M^2)$ ,  $N_D$  má rozdělení  $N(\mu_N, \sigma_N^2)$ ,  $k_{q,q_0}$  má rozdělení  $N(\mu_{kq}, \sigma_{kq}^2)$  a  $K$  má rozdělení  $N(\mu_K, \sigma_K^2)$ . Veličiny lze zapsat také pomocí parametrizace (A3). Dále předpokládáme, že jednotlivé veličiny jsou navzájem stochasticky nezávislé (chyby z parametrizace (A3) jsou navzájem stochasticky nezávislé). Model popisuje situaci, kdy absorbovanou dávku počítáme jako součin veličin, kde každá z nich je zatížená nejistotou. Pro

výpočet absorbované dávky a její nejistoty použijeme odhady jednotlivých parametrů  $\mu_M, \sigma_M, \mu_N, \sigma_N, \mu_{kq}, \sigma_{kq}, \mu_K, \sigma_K$  (např. odhady z odstavce 7). Funkce  $g$  je definována jako součin,  $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 x_4$ . Střední hodnota veličiny  $D$  je součin středních hodnot  $\mu_M \mu_N \mu_{kq} \mu_K$ . Variační koeficient veličiny  $D$ , který je relativní standardní nejistotou absorbované dávky, lze

aproximovat pomocí  $u_r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_M}{\mu_M}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_N}{\mu_N}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{kq}}{\mu_{kq}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_K}{\mu_K}\right)^2}$  (viz rovnice ( A9 )). V uvedeném

vzorci se neznámé hodnoty parametrů  $\sigma_M, \sigma_N, \sigma_{kq}, \sigma_K$  nahradí jejich odhady (např. spočtené pomocí vzorců z odstavce 7 nebo hodnotami, které pro jejich stanovení udává laboratoř). Standardní nejistotu lze pak odhadnout jako  $u_r D$ . (V textu doporučení se relativní standardní nejistota označuje písmenem  $w$ .)

Uvedená aproximace bude nepřesná, pokud relativní standardní nejistoty vstupních veličin přesahují 20 % (odstavec 5.1).

I pokud se díky aproximaci spočte nejistota s dostatečnou přesností, automaticky to nezaručuje, že platí běžně používané interpretace spojené s předpokladem normality (odstavec 8.3). Součin náhodných veličin konverguje za poměrně obecných podmínek k lognormálnímu rozdělení (odstavec 5.4). To je rozdělení, které je obecně velmi rozdílné od normálního rozdělení. Pro nízkou hodnotu nejistoty lze lognormální rozdělení aproximovat normálním rozdělením (odstavec 5.5). Relativní standardní nejistota výstupní veličiny  $D$  by měla být nižší než 5 %, aby přibližně platily interpretace spojené s předpokladem normality, viz. odstavec 8.3. Pro vyšší hodnoty již rozdělení veličiny  $D$  nelze aproximovat normálním rozdělením a nastává také viditelné odchýlení od symetrie a tak by interpretace chyby ve formě  $D \pm ku$  neměla být použita. Doporučená mez pro použití tohoto postupu je ale pouze přibližná. Vhodnost aproximace závisí na více faktorech (např. rychlost konvergence součinu k lognormálnímu rozdělení je ovlivněna rozdělením vstupních veličin) a nelze tedy určit jedno obecně platné pravidlo.

10. V případě nesymetrického rozdělení odhadu stanovované veličiny mohou být interpretace spojené se směrodatnou odchylkou zavádějící. Např.  $X \pm ku$  může zasahovat do oblastí, které nemají fyzikální smysl, nebo může pokrývat oblasti, které jsou ve skutečnosti málo pravděpodobné. Obrázek 8 a obrázky v horní řadě ilustrují situace, kdy by nejistota neměla být vyjadřována stylem  $X \pm ku$ . I v případě symetrického rozdělení stanovované veličiny, které ale nesplňuje předpoklad normality, nebude obecně platit, že použití rozšířené nejistoty splní pokrytí předpokládané pro normální rozdělení (68, 95, 99,7 % pro  $k = 1, 2, 3$ ). V případě porušení normality by měl být zvážen individuální přístup ke kvantifikaci nejistoty (např. namísto  $X \pm ku$  uvést interval, který pokryje s předem danou pravděpodobností skutečnou hodnotu stanovované veličiny).

## B. Statisticky řízená kontrola procesu (SPC)

Tento text vychází z Přílohy č. 2 Doporučení SÚJB Zavedení systému jakosti při využívání významných zdrojů ionizujícího záření v radioterapii: Bezpečné používání moderních radioterapeutických metod z roku 2014 [19]. Terminologie je sladěna s normou ČSN ISO 7870-2:2018 [24].

Statisticky řízená kontrola procesu, statistical process control (SPC), je metoda aplikovaná zejména v průmyslu (kontinuální zlepšování jakosti striktně požadují normy ČSN ISO 9000 [23]), ale je možné ji aplikovat i na problémy v jiných oblastech, např. ve zdravotnictví. Lze ji využít při **hodnocení veškerých normálně rozdělených dat**, např. odchylek získaných při verifikaci patientských plánů, odchylek monitorujících stabilitu výstupu ozařovače při ranní zkoušce, odchylek získaných z in vivo dozimetrie, zavádění nového detektoru, porovnání dvou dozimetrických řetězců z hlediska stability, vliv nejrůznějších vlivů na výsledky zkoušek, apod. Metoda je aplikovatelná i na data, která nemají normální rozdělení, ale v takovém případě se postupuje jiným způsobem, který není v této příloze řešen.

Metoda SPC spočívá v **tvorbě regulačních diagramů** a následném hodnocení analyzovaných dat dostatečně kvalifikovanou osobou, čímž poté můžeme posoudit chování procesů z hlediska jejich časového vývoje. Cílem je, aby byly odstraněny vymezitelné příčiny variability a na procesy působily pouze inherentní (vnitřní) příčiny variability, které jsou neoddelitelné a nezpůsobují změny v rozdělení hodnot sledovaného parametru. U statisticky stabilních procesů je možné předvídat jejich budoucí vývoj s cílem kontinuálního zlepšování jakosti. Pouze statisticky stabilní procesy je možné hodnotit z hlediska jednotlivých ukazatelů způsobilosti a výkonnosti, které charakterizují požadavky naplňování přísných kritérií na jakost na základě stanovených **tolerancních mezí (tolerancí)** daného parametru. Je třeba zdůraznit, že SPC nemá být jednorázová analýza, ale představuje iterační proces, který má vést ke zlepšování jakosti daného postupu. Postup spočívá ve sběru údajů a jejich zakreslení do diagramu, regulaci (výpočtu přirozených regulačních mezí, identifikaci příčin, jejich odstranění a přijetí takových opatření, aby se již neopakovaly, prověření účinnosti těchto opatření, přepočtení přirozených regulačních mezí, opakování sběru dat a stanovení technických regulačních mezí). Pokud toto provedeme, získáme tzv. **statisticky zvládnutý proces**, pro který již můžeme vypočítat **ukazatele způsobilosti**. Následuje etapa analýzy a zlepšování, kdy regulační diagramy monitorují proces a umožňují jeho průběžnou analýzu a odhalování prostoru pro snižování variability vyvolané vymezitelnými příčinami. Přepočet regulačních mezí se má realizovat jen tak často, jak to vyžaduje proces a znalost jeho chování.

Regulační diagramy představené v této příloze jsou tzv. **Shewhartovy regulační diagramy**, které jsou popsány normou ČSN ISO 7870-2:2018 [24]. Regulační diagramy umožňují odlišit stabilní, tj. statisticky zvládnutý proces, od nestabilního. Aplikovat je lze v případě, že data mají normální a symetrické rozložení, konstantní střední hodnotu, konstantní směrodatnou odchylku procesu, nezávislost (nekorelovanost) dat, nepřítomné vybočující hodnoty a vhodně zvolené logické podskupiny (ačkoliv v případě aplikace na výsledky zkoušek není nutné vždy tvořit podskupiny a je možné pracovat s individuálními daty). Klasické Shewhartovy regulační diagramy slouží k rozpoznání vymezitelných příčin variability a uvedení procesu do statisticky stabilního stavu a k centrování procesu na základní hodnotu. Existují diagramy pro kontrolu měření (budeme je uvažovat v této příloze) či srovnáváním (pro naše účely se nehodí, proto je zde popisovat nebudeme – spočívají pouze v kontrole shodnosti, hodnocení daného parametru se omezuje pouze na vyhovuje/nevyhovuje). Je třeba uvést, že v této příloze je uveden zjednodušený postup aplikace SPC v praxi a pro detailnější informace doporučujeme použít zmíněnou normu či vyhledat literaturu zaměřenou výhradně na statistickou regulaci.

SPC využívá toho, že za předpokladu normálně rozdělených dat je možné stanovit regulační meze, které definují oblasti, kde je pravděpodobnost výskytu naměřené hodnoty z důvodu vlastní inherentní variability procesu tak malá, že je výskyt hodnoty v této oblasti pravděpodobně způsoben nějakou vnější příčinou. SPC je nástrojem **metody 6Sigma**, která využívá násobků směrodatné odchylky pro stanovení regulačních mezí, čímž při normálním rozdělení minimalizuje četnost výskytu hodnot mimo regulační meze dle požadovaných specifikací. Kromě toho se SPC zabývá i různým nenáhodným

seskupením naměřených dat uvnitř regulačních mezí. K zavedení metody 6Sigma a využívání SPC v praxi je využíván tzv. **model DMAIC** související se snahou neustále zlepšovat kvalitu procesu. Ten sestává z několika kroků: Define (definice procesu), Measure (měření vybraných charakteristik procesu), Analyze (analýza naměřených dat), Improve (provedení opatření vyplývající z analýzy naměřených dat s cílem zlepšit kvalitu procesu) a Control (sledování výsledků provedených opatření a jejich zhodnocení). Všechny zmíněné nástroje vycházejí z průmyslu (především automobilového), ale aplikovat je lze ve všech dalších oblastech, tudíž i v problematice zabezpečování jakosti v radioterapii.

## Postup aplikace metody SPC

### B.1 Volba dat pro analýzu

Nejprve je třeba vybrat data, pro která chceme SPC provádět. Mělo by být ověřeno prostřednictvím některého ze statistických testů, že jsou tato data normálně rozložena. K tomu lze využít například některé webové stránky, které toto provedou online, viz [25], [26], [27], [28].

V dalším kroku je třeba zvolit vhodný regulační diagram, který pro tato data sestrojíme. V této příloze jsou popsány dvojí typy diagramů - jednak pro **individuální data**, jednak pro **logické podskupiny**. Logickou podskupinou se rozumí data, která byla získána v jednom časovém okamžiku a očekávaná hodnota, které by měla nabývat, je pro všechny stejná. Může to být například matice odchylek získaná při ranní zkoušce z plošného detektoru pro konkrétní energii, nebo odchylky z měření dávky v bodě pro různé úhly rotace hlavičky urychlovače při verifikaci IMRT plánu konkrétního pacienta, kdy očekáváme pro všechny hodnoty v ideálním případě nulové odchylky. Podskupiny by měly být takové, aby hodnoty v rámci podskupiny mezi sebou velmi málo kolísaly. Počty prvků v podskupině pro hodnocení proces musí být pro všechny podskupiny stejné. Regulační diagramy pro individuální hodnoty se hodí všude tam, kde je v čase dlouhodobě získávána pouze jediná hodnota.

- V případě diagramů pro logické podskupiny se sestrojuje **diagram pro průměry z podskupin a diagram pro rozpětí v podskupinách**.
- V případě individuálních dat se sestrojuje **diagram pro individuální hodnoty a diagram pro klouzavá rozpětí**.

### B.2 Výpočet průměrů, výběrových směrodatných odchylek a rozpětí

Diagramy s podskupinami: Pro každou podskupinu vypočteme průměr  $\bar{x}$  a zaneseme je dle časové posloupnosti do diagramu pro průměry z podskupin. Dále spočteme výběrovou směrodatnou odchylku souboru  $s(x)$  a rozpětí v podskupině  $R$  (rozdíl mezi maximální a minimální hodnotou) pro každou podskupinu. Hodnoty  $R$  zaneseme do diagramu pro rozpětí v podskupinách. Poté spočteme z průměrů podskupin celkový průměr  $\bar{\bar{x}}$  (v grafech značeno  $CL_{\bar{x}}$  – centrální přímka pro hodnoty  $x$ ) a zaneseme jej do diagramu pro průměry z podskupin. Z hodnot  $R$  vypočteme průměr  $\bar{R}$  (v grafech značeno  $CL_R$  – centrální přímka pro rozpětí) a zaneseme jej do diagramu pro rozpětí v podskupinách.

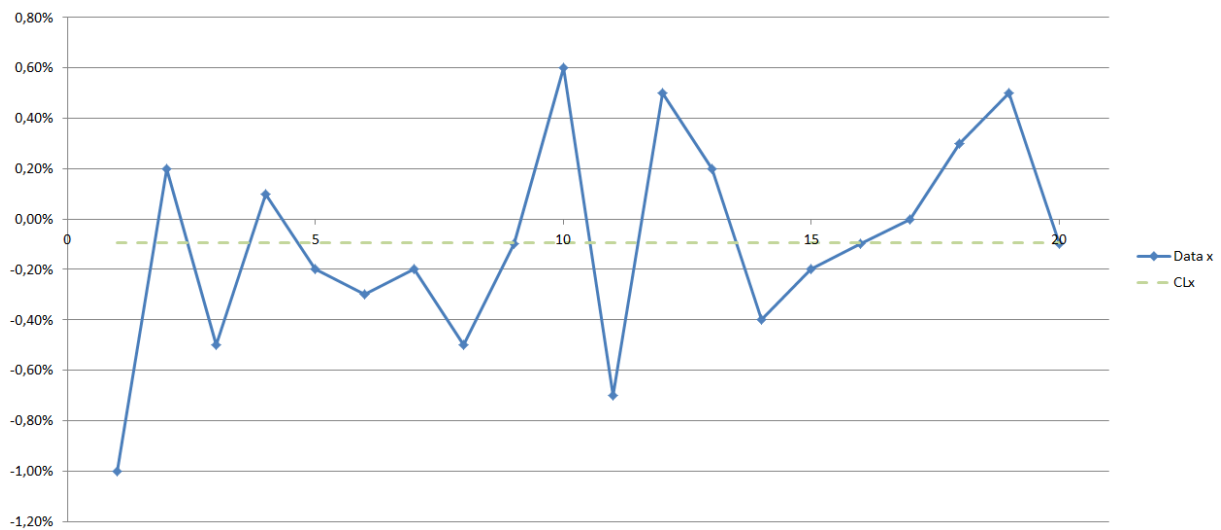
Diagramy s individuálními hodnotami: Princip je stejný jako u diagramů s podskupinami, přičemž se za podskupinu považují dvě po sobě jdoucí naměřené hodnoty (tj. máme podskupiny o dvou členech). Zaneseme data (naměřené hodnoty) do diagramu pro individuální hodnoty. Pro data vypočteme průměr  $\bar{x}$ , (v grafech značeno  $CL_x$  – centrální přímka pro hodnoty  $x$ ), který zaneseme do diagramu s individuálními hodnotami. Spočteme výběrovou směrodatnou odchylku souboru  $s(x)$ . Spočteme klouzavá rozpětí  $R_m$  (v grafu  $MR$ ), což je vždy absolutní hodnota rozdílu mezi dvěma po sobě jdoucími hodnotami (absolutní rozdíl mezi první a druhou, druhou a třetí, třetí a čtvrtou hodnotou, atd.) a zaneseme je do diagramu pro klouzavá rozpětí. Spočteme průměr  $\bar{R}_m$  (v grafech značeno  $CL_{R_m}$  – centrální přímka pro klouzavá rozpětí) a zaneseme jej do diagramu pro klouzavá rozpětí.

**Příklad:** Budeme chtít vytvořit regulační diagramy pro individuální hodnoty a pro klouzavá rozpětí z následujících 20ti hodnot, které jsme získali pro jednu energii při denních zkouškách provozní stálosti v průběhu 4 týdnů: -1,0%, 0,2%, -0,5%, 0,1%, -0,2%, -0,3%, -0,2%, -0,5%, -0,1%, 0,6%, -0,7%, 0,5%, 0,2%, -0,4%, -0,2%, -0,1%, 0,0%, 0,3%, 0,5%, -0,1%. Tato data zaneseme do grafu časové posloupnosti individuálních hodnot. Průměrná hodnota z těchto dat je -0,10% s výběrovou směrodatnou odchylkou

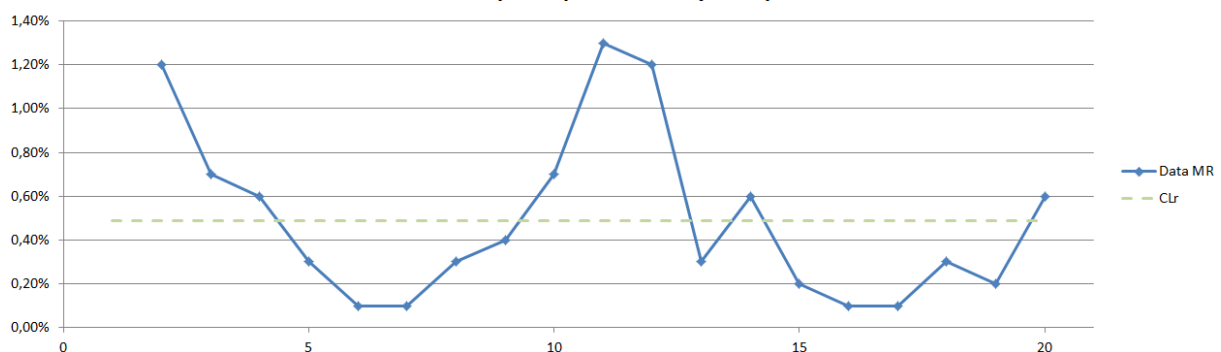


souboru 0,41%, hodnoty R budou: 1,2%, 0,7%, 0,6%, 0,3%, 0,1%, 0,1%, 0,3%, 0,4%, 0,7%, 1,3%, 1,2%, 0,3%, 0,6%, 0,2%, 0,1%, 0,1%, 0,3%, 0,2%, 0,6%. Průměrné klouzavé rozpětí je 0,49%. Průměrnou hodnotu z dat a průběh rozpětí s přímkou znázorňující průměrnou hodnotu rozpětí zakreslíme do grafů.

Časová posloupnost individuálních hodnot



Časová posloupnost klouzavých rozpětí



### B.3 Výpočet přirozených regulačních mezí

Nejprve vypočteme přirozené regulační meze, které nám dají bližší informaci o samotném procesu. Tyto regulační meze umožní odhalit, zda naměřené hodnoty kolísají od jedné hodnoty ke druhé v rozmezí větším, než by bylo možné přisoudit jen náhodě, tzn., že sledujeme jejich prostřednictvím **přirozenou variabilitu procesu**. V tomto okamžiku ještě nepracujeme s tolerancemi v klasickém pojetí, jak je používáme při hodnocení výsledků zkoušek.

Stanovíme horní (UCL) resp. dolní (LCL) přirozené regulační meze jak pro průměry z podskupin resp. individuální hodnoty ( $UCL_{\bar{x}}$ ,  $LCL_{\bar{x}}$ ), tak pro rozpětí v podskupinách resp. klouzavá rozpětí ( $UCL_R$ ,  $LCL_R$ ).

Pro diagramy s podskupinami: Výpočet se provádí v závislosti na počtu prvků v podskupinách, přičemž se využívají koeficienty z tabulky B1.

Regulační meze pro průměry z podskupin se stanoví jako:

$$UCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + A_2 \bar{R}$$

$$LCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - A_2 \bar{R}$$

Regulační meze pro rozpětí v podskupinách se stanoví jako:

$$UCL_R = D_4 \bar{R}$$

$$LCL_R = D_3 \bar{R}$$

Koeficienty  $A_2$ ,  $D_3$  a  $D_4$  použité ve výpočtech nalezneme v následující tabulce:

| Počet prvků v podskupině | $A_2$ | A     | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ |  | $D_4$ | $d_2$ |
|--------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|--|-------|-------|
| 2                        | 1,880 | 2,121 | 0     | 3,686 | 0     |  | 3,267 | 1,128 |
| 3                        | 1,023 | 1,732 | 0     | 4,358 | 0     |  | 2,574 | 1,693 |
| 4                        | 0,729 | 1,500 | 0     | 4,698 | 0     |  | 2,282 | 2,059 |
| 5                        | 0,577 | 1,342 | 0     | 4,918 | 0     |  | 2,114 | 2,326 |
| 6                        | 0,483 | 1,225 | 0     | 5,078 | 0     |  | 2,004 | 2,534 |
| 7                        | 0,419 | 1,134 | 0,204 | 5,204 | 0,076 |  | 1,924 | 2,704 |
| 8                        | 0,373 | 1,061 | 0,388 | 5,306 | 0,136 |  | 1,864 | 2,847 |
| 9                        | 0,337 | 1,000 | 0,547 | 5,393 | 0,184 |  | 1,816 | 2,970 |
| 10                       | 0,308 | 0,949 | 0,687 | 5,469 | 0,223 |  | 1,777 | 3,078 |
| 11                       | 0,285 | 0,905 | 0,811 | 5,535 | 0,256 |  | 1,744 | 3,173 |
| 12                       | 0,266 | 0,866 | 0,922 | 5,594 | 0,283 |  | 1,717 | 3,258 |
| 13                       | 0,249 | 0,832 | 1,025 | 5,647 | 0,307 |  | 1,693 | 3,336 |
| 14                       | 0,235 | 0,802 | 1,118 | 5,696 | 0,328 |  | 1,672 | 3,407 |
| 15                       | 0,223 | 0,775 | 1,203 | 5,741 | 0,347 |  | 1,653 | 3,472 |
| 16                       | 0,212 | 0,750 | 1,282 | 5,782 | 0,363 |  | 1,637 | 3,532 |
| 17                       | 0,203 | 0,728 | 1,356 | 5,820 | 0,378 |  | 1,622 | 3,588 |
| 18                       | 0,194 | 0,707 | 1,424 | 5,856 | 0,391 |  | 1,608 | 3,640 |
| 19                       | 0,187 | 0,688 | 1,487 | 5,891 | 0,403 |  | 1,597 | 3,689 |
| 20                       | 0,180 | 0,671 | 1,549 | 5,921 | 0,415 |  | 1,585 | 3,735 |

Tabulka B1: Koeficienty pro výpočty regulačních mezí a ukazatelů způsobilosti a výkonnosti

Pro diagramy pro individuální hodnoty: Meze vypočteme obdobně, jako tomu bylo v případě s podskupinami, přičemž pro rozpětí používáme koeficienty odpovídající dvěma členům ve skupině (tj. pro  $D_3 = 0$ ,  $D_4 = 3,267$ ). Přirozené regulační meze průměru individuálních hodnot spočteme jako:

$$UCL_x = \bar{x} + 2,66 \times \overline{R}_m$$

$$LCL_x = \bar{x} - 2,66 \times \overline{R}_m$$

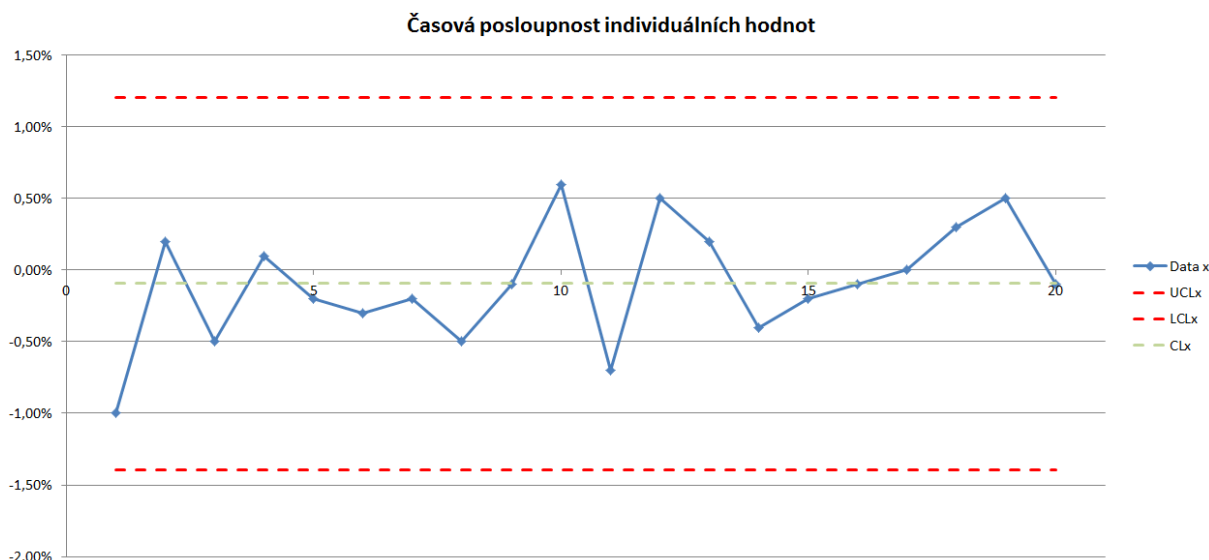
Přirozené regulační meze pro klouzavé rozpětí stanovíme stejně jako při využití podskupin jako:

$$UCL_R = D_4 \overline{R}_m$$

$$LCL_R = D_3 \overline{R}_m$$

Diagram s průměry podskupin ukazuje centrování celého procesu, vyjadřuje jeho stabilitu. Odhaluje nežádoucí kolísání mezi podskupinami z hlediska jejich průměrů. Diagram pro rozpětí v podskupinách odhaluje každé nežádoucí kolísání uvnitř podskupin a je ukazatelem velikosti **variability sledovaného procesu neboli stejnoměrnosti procesu**. Pokud diagram R nezůstává ve statisticky zvládnutém stavu nebo vykazuje trend, může to ukazovat, že buď různé podskupiny byly podrobeny odlišnému vyhodnocení, nebo že na proces působí několik různých systémů charakteru: příčina - následek. Jako příklad můžeme uvést třeba odchýlení hodnoty získané jedním detektorem od hodnot získaných ostatními detektory ve skupině, kde se předpokládá stejná hodnota získaná všemi detektory, přičemž po zhodnocení všechny hodnoty vyhovely našim nastaveným tolerancím, ale po provedení SPC se vyskytne tato jedna hodnota mimo regulační meze. **Toleranční meze** („tolerance“, jak jsou používány v doporučeních SÚJB) samy o sobě nemusí odhalit změnu ve variabilitě našeho procesu v důsledku vnější příčiny.

*Příklad: Pro naše hodnoty dle uvedených vztahů spočteme přirozené regulační meze. Horní přirozená regulační mez bude rovna  $UCL_x = -0,10\% + 2,66 * 0,49\% = 1,21\%$ ; dolní přirozená regulační mez bude rovna  $LCL_x = -0,10\% - 2,66 * 0,49\% = -1,41\%$*



#### B.4 Získání statisticky zvládnutého procesu

Je třeba zhodnotit, zda proces je statisticky zvládnutý. Podíváme se na diagramy pro rozpětí v podskupinách resp. klouzavá rozpětí a diagramy pro průměry z podskupin resp. individuálních dat, a pokud se vyskytly hodnoty mimo přirozené toleranční meze či hodnoty vykazující určitý trend, provedeme šetření, co k těmto nevyhovujícím výsledkům vedlo. Pokud se nám příčinu podařilo nalézt, vyloučíme tato data z dalšího hodnocení, a zapracujeme na odstranění příčiny, protože ta by mohla v budoucnu opět ovlivnit získaná data. Přepočteme nově přirozené meze bez vyloučených hodnot. Cílem tohoto kroku je získat informaci o vnitřní (inherentní) variabilitě procesu a dosáhnout toho, aby byl **proces statisticky zvládnutý**.

#### B.5 Tvorba technických regulačních mezí

Pokud se nám podařilo ověřit, že proces je statisticky zvládnutý, následuje výpočet technických regulačních mezí s ohledem na naše požadavky na proces a tyto potom využijeme **pro další sledovací období**.

Technické regulační meze umožní identifikovat, zda naměřené hodnoty (např. v několika podskupinách o  $n$  hodnotách) se liší od zvolených **základních hodnot  $X_0$**  více, než lze očekávat při působení pouze náhodných příčin. Umožňují nám vymezit oblasti, které splňují naše vstupní požadavky na **centrální hodnotu** (tj. aktuální průměr ať už podskupin nebo individuálních hodnot) a maximální povolenou směrodatnou odchylku (např. se zohledněním běžně používaných tolerancí). Požadujeme, aby se centrální hodnota rovnala zvolené základní hodnotě  $X_0$ . V našem případě se nejčastěji bude jednat o situaci, kdy předpokládáme, že vyhodnocované odchylky by měly být rovnoměrně rozloženy okolo nuly, tj.  $X_0 = 0$ . Požadavek na směrodatnou odchylku dat  $\sigma_0$  stanovíme z požadavku na ukazatel výkonnosti  $P_p = 1,33$  (bude podrobně rozepisován v kapitole B.7):

$$\sigma_0 = \frac{USL - LSL}{6 \times 1,33}$$

kde  $USL - LSL$  je předepsané **toleranční pole** (tzv. toleranční rozmezí), tj. rozdíl **horní a dolní toleranční meze** (např. při toleranci 2% bude toleranční pole 4%).

Následuje výpočet technických regulačních mezí pro diagramy.

Diagramy s podskupinami:

$$UCL_{\bar{x}T} = X_0 + A\sigma_0$$

$$LCL_{\bar{x}T} = X_0 - A\sigma_0$$

$$UCL_R T = D_2 \sigma_0$$

$$LCL_R T = D_1 \sigma_0$$

Diagramy pro individuální hodnoty:

$$UCL_x T = X_0 + 3\sigma_0$$

$$LCL_x T = X_0 - 3\sigma_0$$

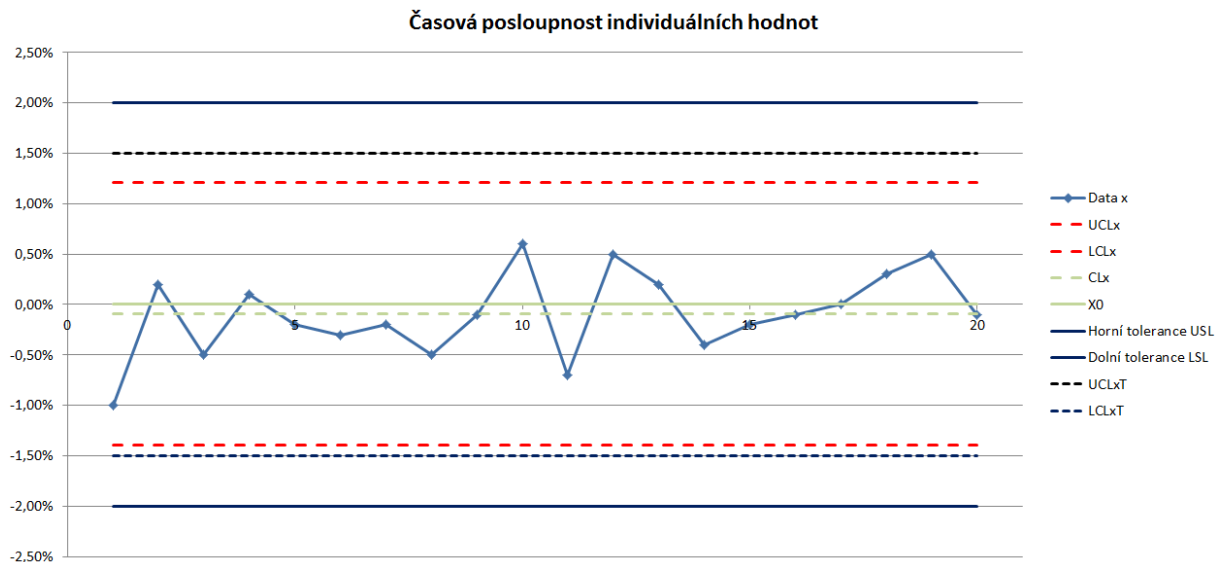
$$UCL_R T = D_2 \sigma_0$$

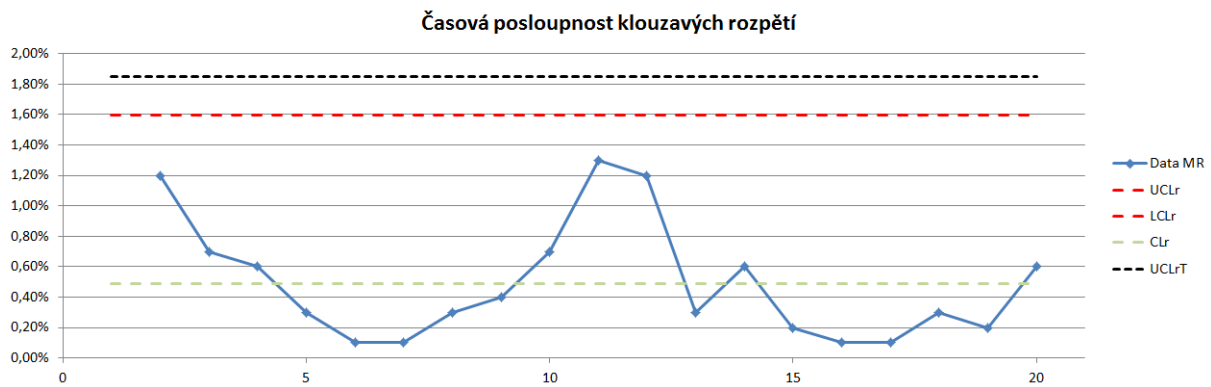
$$LCL_R T = D_1 \sigma_0$$

Pokud leží naše nově naměřené hodnoty uvnitř technických regulačních mezí, potom máme zaručeno, že ukazatelé výkonnosti  $P_p$  a  $P_{pk}$  jsou minimálně 1,33. Takto stanovené technické regulační meze použijeme pro další období a jejich změnu provedeme pouze v případě, že si to proces vyžádá (tj. detekujeme změnu v chování nově naměřených dat, apod.).

Zároveň do diagramu pro průměry podskupin či individuálních hodnot můžeme zakreslit naše toleranční meze (přesně v tom smyslu, v jakém jsme zvyklí je při zkouškách či měření používat).

**Příklad:** Pro proces v příkladu použijeme toleranci 2%, tj. horní toleranční mez 2% a dolní toleranční mez -2%. Proto bude  $\sigma_0 = 4\% / (6 * 1,33) = 0,5\%$ . Naším cílem je, aby průměr procesu byl 0% (tj. v průběhu procesu budou odchylky fluktuovat do kladných i záporných hodnot). Pro individuální data bude mít horní technická regulační mez hodnotu  $UCL_x T = 0 + 3 * 0,5\% = 1,5\%$ , dolní technická regulační mez  $LCL_x T = 0 - 3 * 0,5\% = -1,5\%$ . Pro klouzavé rozpětí je třeba nalézt v tabulce B1 hodnotu pro koeficient  $D_2$  pro  $n=2$ , což je 3,686. Potom bude mít horní technická regulační mez pro klouzavá rozpětí hodnotu  $UCL_R T = 3,686 * 0,5\% = 1,843\%$ . V tabulce B1 nalezneme koeficient  $D_1$  pro  $n=2$ , což je 0, tzn. dolní technická regulační mez pro klouzavá rozpětí  $LCL_R T = 0 * 0,5\% = 0\%$ . Všechny technické meze zakreslíme do diagramů (v našich grafech jsou technické regulační meze černě čárkovaně). Plnou černou čarou jsou do diagramu pro porovnání zakresleny i toleranční meze  $\pm 2\%$ .





### B.6 Tvorba rozšířených regulačních mezí s využitím směrodatné odchylky

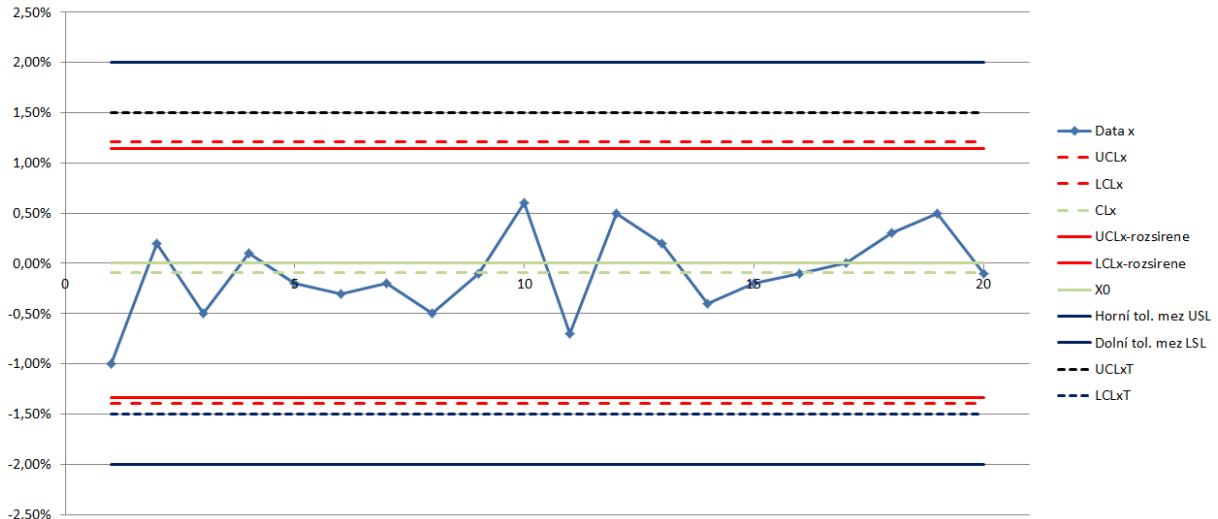
Technické regulační meze v podstatě vymezují požadovaný stav. Nás ale mohou zajímat regulační meze vycházející nikoliv z naší specifikace (požadavku), ale ze současných reálných hodnot (naš proces nemusí být centrován, tj. průměr nebude přesně roven základní hodnotě  $X_0$  a stejně tak se reálná směrodatná odchylka  $\sigma_{tot}$  a požadovaná směrodatná odchylka  $\sigma_0$  mohou odlišovat). Pro tento účel můžeme použít rozšířené regulační meze pro průměry vycházející ze směrodatné odchylky získaných dat, přičemž k výpočtu se použijí stejné vztahy, jako jsou uvedeny výše v bodě B.5, avšak  $X_0$  bude průměrná hodnota průměrů podskupin resp. individuálních hodnot ze současných reálných hodnot a namísto  $\sigma_0$  použijeme  $\sigma_{tot}$  tj. celkovou směrodatnou odchylku ze všech dat (výběrovou směrodatnou odchylku souboru).

Takto přepočtené regulační meze použijeme pro hodnocení procesu v následujícím období. **Technické regulační meze a rozšířené regulační meze s použitím směrodatné odchylky poukazují každé na něco jiného** – technické regulační meze poukazují na náš požadavek, zatímco rozšířené regulační meze znázorňují chování našeho procesu a vymezují oblasti, kde při normálně rozdělených datech můžeme očekávat průměrně 99,73% všech dat. Poloha rozšířených regulačních mezí vůči technickým regulačním mezím nám dává informaci o vycentrování procesu.

Předpokládáme, že všechna data ovlivněná vnějšími příčinami byla odstraněna. Rozšířené regulační meze by měly být uvnitř tolerančních mezí. Pokud tomu tak není, znamená to, že proces je třeba statisticky zvládnutý, ale rozptyl hodnot je tak vysoký, že z inherentní variability procesu budou některé hodnoty vycházet mimo toleranci s pravděpodobností vyšší než je 0,27% (protože rozšířené regulační meze nastavujeme do vzdálenosti trojnásobku směrodatné odchylky od průměrné hodnoty na obě strany). Taková situace může být způsobena jak variabilitou samotné ověřované veličiny, tak variabilitou detekčního zařízení či měřidla.

**Příklad:** Směrodatná odchylka ze všech dat  $\sigma_{tot}$  je 0,41 %. Rozšířená horní regulační mez bude mít hodnotu  $UCL_{x,rozsir} = -0,1\% + 3*0,41\% = 1,13\%$  a rozšířená dolní regulační mez bude mít hodnotu  $LCL_{x,rozsir} = -0,1\% - 3*0,41\% = -1,33\%$ . Do grafu jsou zakresleny červeně.

Časová posloupnost individuálních hodnot



### B.7 Stanovení ukazatelů způsobilosti a výkonnosti a výpočet pravděpodobností výskytu hodnoty mimo regulační meze

Pro statisticky zvládnutý proces je potom možné stanovit ukazatele způsobilosti ( $c_p$  a  $c_{pk}$ ) a výkonnosti ( $P_p$  a  $P_{pk}$ ).

**Ukazatel způsobilosti  $c_p$**  se stanoví jako:

$$c_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma_{odhad}}$$

kde  $USL - LSL$  je předepsané toleranční pole (tzv. toleranční rozmezí), tj. rozdíl horní a dolní toleranční meze. Symbol  $\sigma_{odhad}$  je odhad průměrné variability uvnitř podskupin a stanoví se jako:

$$\sigma_{odhad} = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

Hodnota koeficientu  $d_2$  se opět získá z tabulky B1, přičemž pro individuální data se použije hodnota pro  $n = 2$ , tj. 1,128. **Ukazatel  $c_p$  by měl být pro způsobilé procesy větší než 1.** Pokud je menší než 1, znamená to, že proces není způsobilý. Když je roven jedné, znamená to, že námi nastavené toleranční meze odpovídají intervalu, do kterého v průměru bude patřit 99,73% hodnot a proces označujeme pouze jako „stěží blízký způsobilosti“. V praxi se obvykle **za minimální přípustnou hodnotu považuje hodnota  $c_p = 1,33$ .** V takovém případě odpovídá toleranční rozmezí  $8\sigma$ , tzn. pro normálně rozdělená data je pravděpodobnost překročení tolerančních mezí 0,0064%. Ukazatel  $c_p$  stanovuje vztah tolerančních mezí k přirozenému rozptylu naměřených hodnot danému samotnou variabilitou procesu. Neuvažuje centrování procesu.

Způsobilost je vhodné hodnotit pro proces, který setrvává ve statisticky zvládnutém stavu nejméně alespoň pro posledních 25 podskupin či individuálních hodnot. Pro hodnocení výsledků měsíčních zkoušek provozní stálosti je třeba mít tedy statisticky zvládnutý proces za poslední dva roky.

**Centrování procesu** je popsáno **ukazatelem způsobilosti  $c_{pk}$ .** Stanoví se jako:

$$c_{pk} = \min \left\{ \frac{USL - \mu}{3\sigma_{odhad}}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma_{odhad}} \right\} = \min \{c_{pU}, c_{pL}\}$$

Platí, že  $c_p$  je vždy větší než  $c_{pk}$ .  $\mu$  představuje střední hodnotu, která je odhadnuta prostřednictvím průměrné hodnoty (podskupin či individuálních hodnot). Čím je hodnota  $c_{pk}$  bližší hodnotě  $c_p$ , tím lépe je proces vycentrován.

Ukazatel  $c_p$  vyjadřuje obecně, čeho jsme schopni dosáhnout za ideálního centrování při působení pouze náhodných příčin variability a udržení tohoto stavu v čase. Ukazatel  $c_{pk}$  vyjadřuje obecně, čeho jsme ve skutečnosti dosáhli.

Na základě vypočtených hodnot  $c_{pL}$  a  $c_{pU}$  (viz vzorec pro  $c_{pk}$ ) je možné odhadnout podíl počtu hodnot, které leží nad horní či pod dolní toleranční mezí vůči celkovému počtu hodnot. Platí, že  $3 \cdot c_{pL} = z_L$  a  $3 \cdot c_{pU} = z_U$ , kde  $z_L$  resp.  $z_U$  představují kvantily normovaného normálního rozdělení  $N(0,1)$ , pro které jsou tabelovány hodnoty distribuční funkce  $(1-p_U)$  resp.  $(1-p_L)$ . Podíly  $p_U$  resp.  $p_L$  jsou podíly hodnot nad horní, resp. pod dolní toleranční mezí vůči celkovému počtu hodnot.

Pokud se směrodatná odchylka vztahuje k úrovni inherentní variability, jedná se o ukazatele způsobilosti procesu  $c_p$ . Když se uvažovaná směrodatná odchylka vztahuje k celkové variabilitě procesu, jedná se o ukazatele výkonnosti  $P_p$ .

**Ukazatele výkonnosti** jsou definovány jako:

$$P_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma_{tot}}$$

$$P_{pk} = \min \left\{ \frac{USL - \mu}{3\sigma_{tot}}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma_{tot}} \right\}$$

kde  $\sigma_{tot}$  představuje celkovou směrodatnou odchylku charakterizující celkovou variabilitu ve výběru  $N$  hodnot (pokud je výběr rozdělen do  $k$  podskupin stejného rozsahu  $n$ , je  $N = k \cdot n$ ).

**Ukazatele způsobilosti** se používají pro zhodnocení úrovně inherentní variability vyjádřené ve velikosti směrodatné odchylky podskupin. **Ukazatele výkonnosti** neudávají potenciaální počet, ale očekávaný reálný počet hodnot vyskytujících se mimo rozšířené regulační meze, protože pracují již s celkovou směrodatnou odchylkou, nikoliv pouze směrodatnou odchylkou podskupin. Platí, že  $c_p \geq c_{pk}$ ,  $P_p \geq P_{pk}$ , přičemž  $c_p = c_{pk}$ ,  $P_p = P_{pk}$  pouze tehdy, když je proces přesně centrován na střed mezi technické regulační meze.

Pro úplnost je třeba uvést, že stanovené ukazatele způsobilosti a výkonnosti jsou pouze odhady a takto je s nimi třeba nakládat. Správné by bylo doplnit jejich stanovení i konfidenčními intervaly, což však v této publikaci není řešeno.

Analýza způsobilosti procesu je základem pro **zlepšování procesu**. Kromě sledování překročení obvyklých tolerančních mezí je jakýmsi poplašným zařízením pro hlídání procesu, může sloužit jako podklad pro zdůvodnění nákupu nového přístroje (např. detektoru pro ranní kontroly) či hodnotit výsledky získané v testu různými osobami.

Všechny ukazatele způsobilosti a výkonnosti jsou bezrozměrné veličiny. Pokud má náhodná veličina normální rozdělení  $N(\mu, \sigma^2)$  a proces probíhá za působení pouze náhodných příčin variability, tj. proces je ve statisticky zvládnutém stavu, což znamená, že je z hlediska průměru procesu centrován (tj. platí  $\mu = (USL+LSL)/2$  a z hlediska variability má stálou a známou směrodatnou odchylku  $\sigma$ ), potom očekávaný podíl hodnot mimo tolerance je  $p = 2p_z$ , pro  $z_p=3c_p$  (hodnoty  $z_p$  jsou kvantily rozdělení  $N(0,1)$ ).

**Příklad:** Provedeme výpočet ukazatelů způsobilosti a výkonnosti pro data popsaná v příkladu (ač pouze z 20 hodnot, jedná se pouze o ilustraci). Nejprve musíme stanovit odhad průměrné variability uvnitř podskupin prostřednictvím  $\sigma_{odhad}$ . Průměrné  $R$  je 0,49%, hodnota  $d_2$  pro  $n = 2$  je 1,128. Potom  $\sigma_{odhad} = 0,49/1,128 \% = 0,43\%$ . Tuto hodnotu potom použijeme pro výpočet  $c_p = 4\%/(6 \cdot 0,43\%) = 1,55$ . Pokračujeme výpočtem ukazatele způsobilosti  $c_{pk}$ . Ten je minimem z hodnot  $c_{pU} = (2\% + 0,1\%)/(3 \cdot 0,43\%) = 1,63$  a  $c_{pL} = (-0,1\% + 2\%)/(3 \cdot 0,43\%) = 1,47$ .  $c_{pk}$  je tedy rovno 1,47. Ukazatel výkonnosti  $P_p$  stanovíme s použitím celkové směrodatné odchylky, která má v našem případě hodnotu 0,41%. Potom  $P_p = 4\%/(6 \cdot 0,41\%) = 1,63$ . Pro  $P_{pk}$  volíme menší z hodnot  $P_{pU} = (2\% + 0,1\%)/(3 \cdot 0,41\%) = 1,71$  a  $P_{pL} = (-0,1\% + 2\%)/(3 \cdot 0,41\%) = 1,54$ .  $P_{pk}$  je tedy rovno 1,54. Náš proces je tedy způsobilý (protože  $c_p$  i  $P_p$  jsou větší než 1,33) a dobře centrován (protože  $c_{pk}$  i  $P_{pk}$  jsou větší než 1,33). Nyní spočteme

procento hodnot, které se na základě rozdělení našich hodnot mohou nacházet mimo toleranci. Spočteme  $z_L = 3 * 1,47 = 4,41$ , což je kvantil normovaného rozdělení  $N(0,1)$ , kterému odpovídá hodnota distribuční funkce 0,999995, tj.  $p_L$  je 0,000005. Pokud si náš uvažovaný proces ponechá stávající rozdělení, pouze 5 hodnot z milionu padne bez vnější příčiny pod dolní toleranční mez. Obdobně spočteme  $z_U = 3 * 1,63 = 4,89$ , čemuž odpovídá  $p_U = 0,000005$ , tj. dokonce pouze 5 hodnot z deseti milionů padne bez vnější příčiny nad horní toleranční mez.

## B.8 Hodnocení nenáhodného chování procesu

Při hodnocení odchylek v běžné praxi je snadné odhalit vybočující hodnotu, která se bude nacházet nad nebo pod uživatelem zvolenými tolerančními hodnotami, které mohou být přísnější než regulační meze. Co však obvykle nebývá sledováno, je právě nenáhodné seskupení bodů mezi tolerančními hodnotami či vycentrování procesu. Retrospektivně tak lze vysledovat faktory, které mohou ovlivňovat variabilitu procesu a v rámci kontinuálního zlepšování jakosti je odstranit či zmenšit.

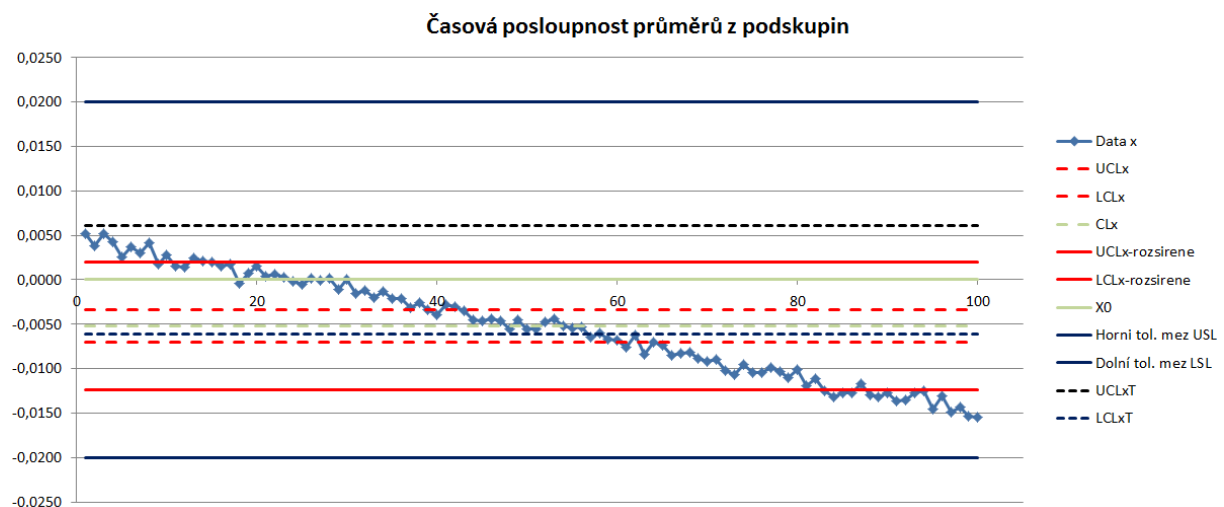
Pokud budou do grafu zakresleny i přímky znázorňující  $\sigma$  a  $2\sigma$ , lze tato nenáhodná seskupení bodů určit pomocí následujících pravidel:

1. Jeden bod leží mimo regulační meze.
2. Devět bodů leží za sebou na stejné straně od centrální přímky (def. viz Slovník a zkratky pro přílohu B).
3. Šest bodů za sebou roste nebo klesá.
4. Čtrnáct bodů za sebou alternuje nahoru a dolů.
5. Nejméně dva body ze tří leží za sebou ve vzdálenosti mezi  $2\sigma$  a  $3\sigma$  od centrální přímky.
6. Nejméně čtyři z pěti bodů leží za sebou ve vzdálenosti  $\sigma$  a  $2\sigma$  od centrální přímky.
7. Patnáct bodů za sebou leží za sebou ve vzdálenosti  $\sigma$  nad a pod centrální přímkou.
8. Pět bodů za sebou leží ve vzdálenosti větší než  $\sigma$ , body se nachází na obou stranách od centrální přímky.

Obvykle pro grafy průměrů z podskupin resp. individuálních hodnot postačuje použít pravidla 1 – 4 a pro diagramy rozpětí v podskupinách resp. klouzavých rozpětí pouze první pravidlo.

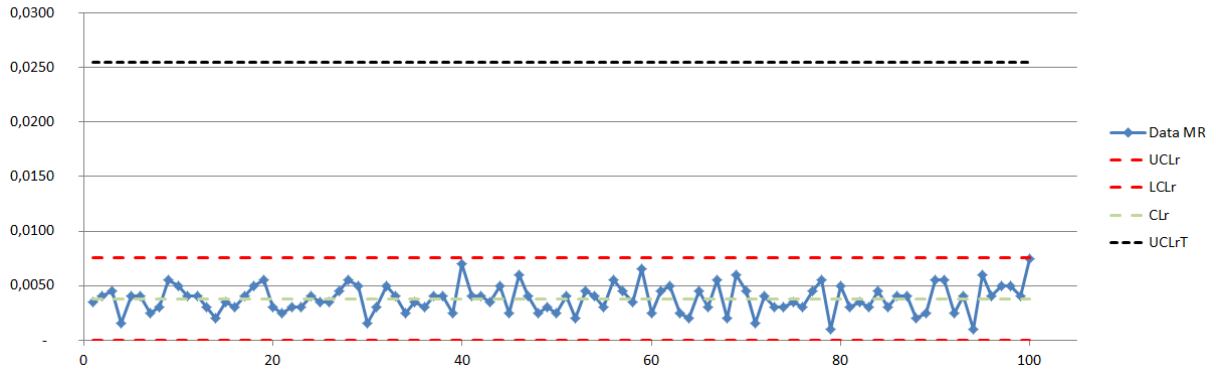
## B.9 Příklady

1) Regulační diagramy pro průměry z podskupin a rozpětí pro data vykazující trend:





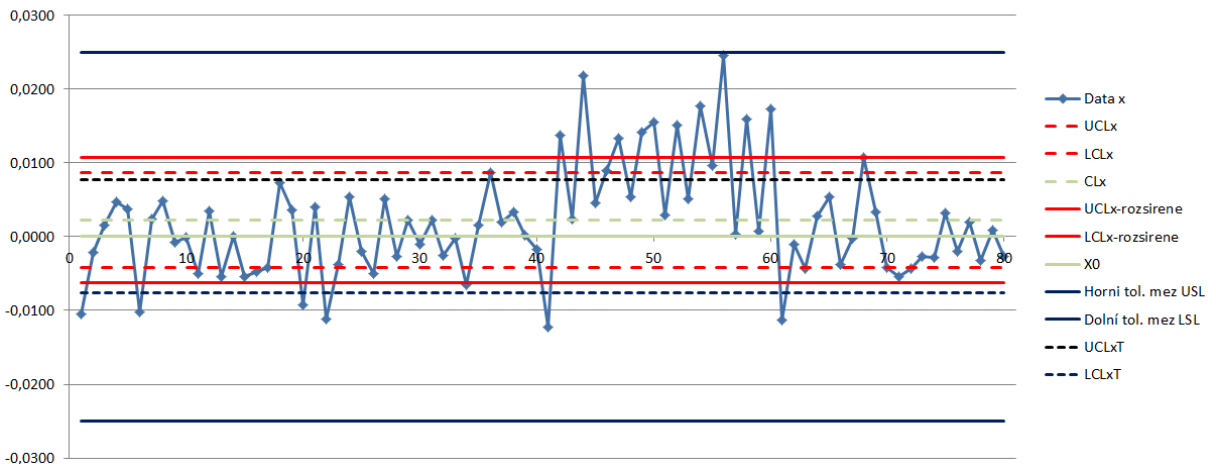
Časová posloupnost rozpětí R



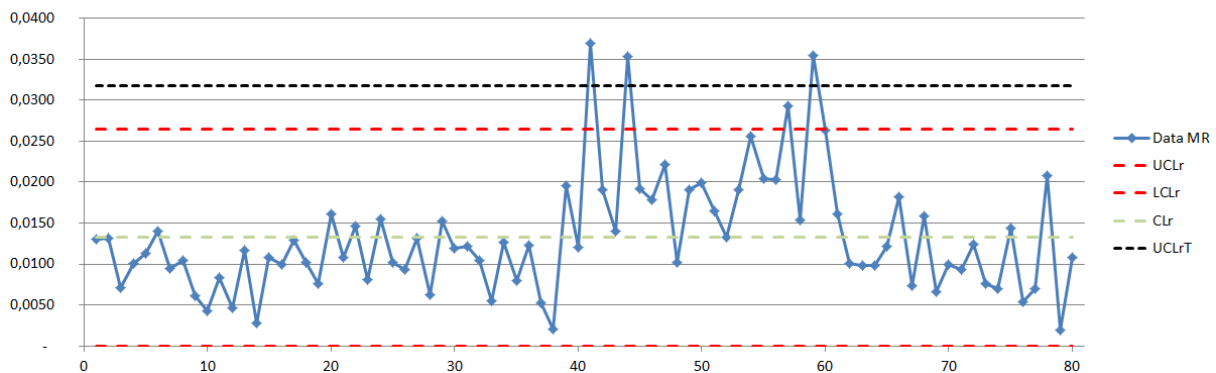
V diagramu pro průměrné hodnoty podskupin je na první pohled vidět, že dlouhodobě data vykazují klesající trend. Přesto variabilita v rámci podskupin je velmi dobrá, ukazatel způsobilosti  $c_p$  je 4,5 a proces v rámci podskupin je i velmi dobře centrován ( $c_{pk} = 3,3$ ). Ukazatel výkonnosti  $P_p$  je však 1,1 a ukazatel výkonnosti  $P_{pk} = 0,8$ . Ačkoliv všechna data jsou v tolerančních mezích, není proces způsobilý a je třeba prošetřit přítomnost vnějších příčin majících vliv na trend dat v čase. Sledováním diagramu a trendu můžeme například stanovit vhodnou dobu pro novou kalibraci in vivo polovodičových detektorů, které v čase ztrácejí citlivost a jejich odezva s nazářenou dávkou klesá.

2) Změna střední hodnoty a rozptylu v průběhu procesu

Časová posloupnost průměrů z podskupin



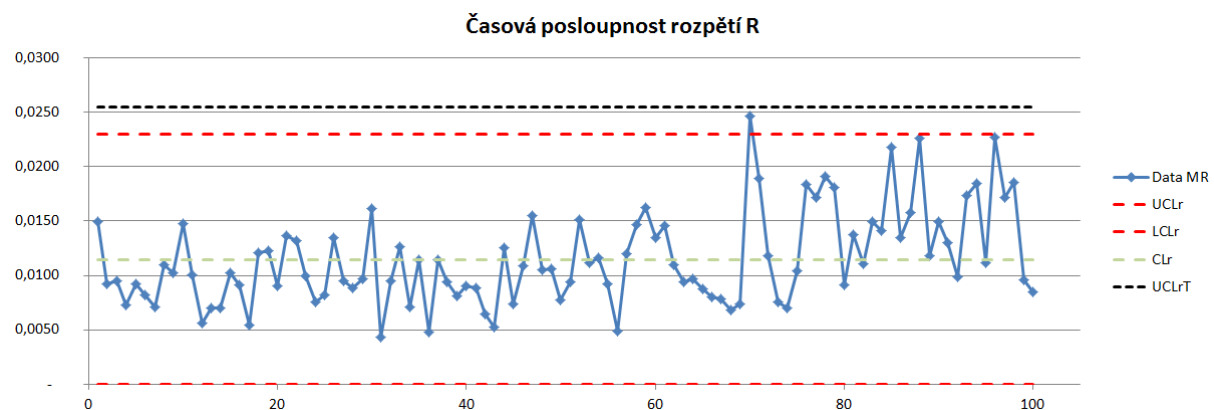
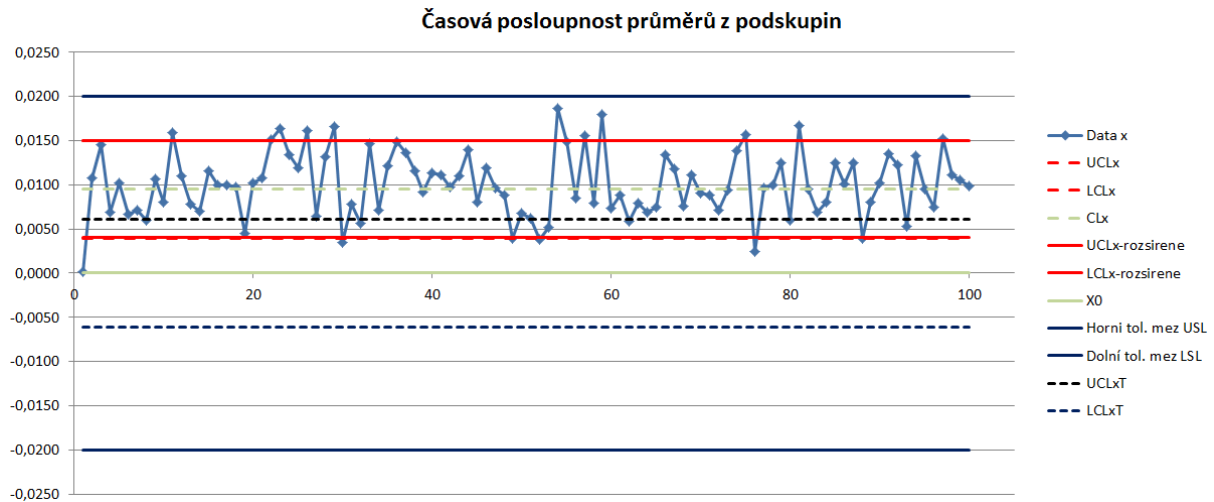
Časová posloupnost rozpětí R



V diagramu pro průměrné hodnoty z podskupin je v centrální části vidět systematické zvýšení hodnot. Jedná se o zpracování dat z průběhu dvaceti týdnů, kdy v prvních osmi týdnech a v posledních osmi týdnech se měřilo stejným dozimetrickým systémem. V období čtyř týdnů mezi nimi byl použit náhradní detektor, vykazující v průměru systematickou odchylku 1% vůči původnímu systému směrem k vyšším hodnotám, rozptyl hodnot byl tímto druhým detektorem rovněž vyšší. Přestože data

naměřená oběma typy detektorů se řídí normálním rozdělením a přestože všechny naměřené hodnoty i v rámci podskupin byly v toleranci ( $\pm 2,5\%$ ), není takový proces statisticky způsobilý. Ukazatelé způsobilosti byly  $c_p = 1,6$  a  $c_{pk} = 1,5$ , ale ukazatelé výkonnosti byly  $P_p = 1,2$  a  $P_{pk} = 1,1$ . Na odchylku od běžného stavu nás mohou upozornit i zvýšené hodnoty na diagramu R. Na tomto příkladu je vidět, že lze posoudit, zda v rámci jednoho procesu můžeme z hlediska statistické způsobilosti používat dva (či více) různých dozimetrických systémů i v případě, kdy všechna data s nimi získaná ležela v námi stanovených tolerancích.

3) Výrazná změna jedné hodnoty v rámci podskupiny vzhledem k ostatním a nevycentrování procesu



Regulační diagram průměrů z podskupin nevykazuje na první pohled kromě nevycentrování žádnou výraznou variabilitu. Proces je způsobilý, avšak jedna z hodnot v podskupině skokově změnila své hodnoty v průměru o 1% a udržovala je o toto jedno procento zvýšené. To je patrné z vyšších hodnot rozpětí R v pravé části grafu oproti jeho levé části. Celkově není proces vycentrován.

### Formulář v Excelu

SÚRO má vytvořen formulář v Excelu, který je možné (bez záruky) použít pro provedení SPC jak pro individuální data, tak pro měření s podskupinami. Tento formulář je možné poskytnout zájemcům z řad radiologických fyziků za předpokladu, že se důkladně seznámili s teoretickými principy SPC a znají charakter dat, která mají být pomocí SPC analyzována.

## Slovník a zkratky pro přílohu B

|                  |  |
|------------------|--|
| SPC              | Statistical process control – statisticky řízená kontrola procesu  |
| $\bar{x}$        | Průměr dat v podskupině příp. průměr z individuálních hodnot   |
| $\bar{\bar{x}}$  | Průměr z průměrů podskupin $\bar{x}$   |
| R                | Range – rozpětí v podskupině: rozdíl mezi maximální a minimální hodnotou v podskupině. V doporučení [19] označováno jako „výběrové rozpětí“.   |
| $R_m$            | Moving Range - klouzavé rozpětí: v případě individuálních hodnot, v takovém případě se jedná o absolutní hodnotu rozdílu dvou po sobě jdoucích hodnot (někdy označováno MR). V doporučení [19] označováno jako R.  |
| $\bar{R}$        | Průměr z rozpětí   |
| $X_0$            | Základní hodnota, tj. požadovaná hodnota (např. 0 % v případě hodnocení odchylek)  |
| CL               | Central line - centrální přímka: centrální přímka je umístěna v referenční hodnotě zakreslené charakteristiky (hodnoty, rozpětí, směrodatná odchylka). Při určování, zda proces je či není ve statisticky zvládnutém stavu, je referenční hodnotou obvykle průměr uvažované statistické charakteristiky. Při regulaci procesu může být referenční hodnotou dlouhodobá hodnota znaku daná specifikací produktu; hodnota zakreslené statistiky vycházející z minulé zkušenosti s procesem, který byl ve statisticky zvládnutém stavu, nebo hodnota založená na předpokládané cílové hodnotě produktu [24]. |
| $UCL_x$          | Upper control limit - přirozená horní regulační mez pro průměry z podskupin resp. individuální hodnoty   |
| $LCL_x$          | Lower control limit - přirozená dolní regulační mez pro průměry z podskupin resp. individuální hodnoty   |
| $UCL_R$          | Přirozená horní regulační mez pro rozpětí v podskupinách resp. klouzavá rozpětí  |
| $LCL_R$          | Přirozená dolní regulační mez pro rozpětí v podskupinách resp. klouzavá rozpětí  |
| $\sigma_0$       | Požadovaná směrodatná odchylka dat, předem stanovená   |
| USL              | Upper specification limit – horní toleranční mez   |
| LSL              | Lower specification limit – dolní toleranční mez   |
| USL-LSL          | Toleranční pole, toleranční rozmezí: interval vymezený horní a dolní toleranční mezí   |
| $UCL_{xT}$       | Technická horní regulační mez pro průměry z podskupin resp. individuální hodnoty   |
| $LCL_{xT}$       | Technická dolní regulační mez pro průměry z podskupin resp. individuální hodnoty   |
| $UCL_{RT}$       | Technická horní regulační mez pro rozpětí v podskupinách resp. klouzavá rozpětí  |
| $LCL_{RT}$       | Technická dolní regulační mez pro rozpětí v podskupinách resp. klouzavá rozpětí  |
| $\sigma_{tot}$   | Celková směrodatná odchylka ze všech dat   |
| $C_p$            | Ukazatel způsobilosti vyjadřující vztah směrodatné odchylky v rámci podskupin a tolerančních mezí  |
| $C_{pk}$         | Ukazatel způsobilosti v rámci podskupin vyjadřující centrování procesu   |
| $\sigma_{odhad}$ | Odhad průměrné variability uvnitř podskupin  |
| $Z_L$            | Dolní kvantil normovaného normálního rozdělení   |
| $Z_U$            | Horní kvantil normovaného normálního rozdělení   |

|          |  |
|----------|--|
| $p_U$    | Podíl počtu hodnot vyskytujících se pro daný proces řídicí se normálním rozdělením nad horní toleranční mezí vůči celkovému počtu hodnot |
| $p_L$    | Podíl počtu hodnot vyskytujících se pro daný proces řídicí se normálním rozdělením pod dolní toleranční mezí vůči celkovému počtu hodnot |
| $P_p$    | Ukazatel výkonnosti vyjadřující vztah směrodatné odchylky a tolerančních mezí  |
| $P_{pk}$ | Ukazatel výkonnosti procesu vyjadřující centrování procesu   |
| $\mu$    | Střední hodnota  |
| $s(x_i)$ | Výběrová směrodatná odchylky souboru (pro podskupinu nebo pro individuální hodnoty)  |

## Literatura

- [1] TRS 398: IAEA TRS 398 Absorbed dose determination in external beam radiotherapy. An International Code of Practice for Dosimetry Based on Standards of Absorbed Dose to Water (2006).
- [2] IAEA TECDOC 1274 Calibration of photon and beta ray sources used in brachytherapy. [http://www-pub.iaea.org/MTCD/publications/PDF/te\\_1274\\_prn.pdf](http://www-pub.iaea.org/MTCD/publications/PDF/te_1274_prn.pdf)
- [3] Kontrola kvality radiodiagnostických vyšetření ve stomatologii. Zubní rentgeny pro intraorální snímkování – kontrolované komponenty a parametry pro řízení kvality provozu. SÚJB 2002. Dostupné na adrese [http://www.sujb.cz/fileadmin/sujb/docs/dokumenty/publikace/MP\\_stomatologie\\_kontrola\\_kvality.pdf](http://www.sujb.cz/fileadmin/sujb/docs/dokumenty/publikace/MP_stomatologie_kontrola_kvality.pdf)
- [4] EA - 4/02 M:2022 Vyhodnocení nejistoty měření při kalibraci. ČIA o.p.s., Praha, duben 2022. [https://www.cai.cz/wp-content/uploads/2022/04/01\\_08-P001-EA-04\\_02-M\\_2022\\_20220425opr.pdf](https://www.cai.cz/wp-content/uploads/2022/04/01_08-P001-EA-04_02-M_2022_20220425opr.pdf)
- [5] WHITE, D.R., SAUNDERS, P.: The propagation of uncertainty on interpolated scales, with examples from thermometry. Metrologia, Vol. 37 (2000), p. 285-293
- [6] TRS 457: IAEA TRS 457 Dosimetry in diagnostic radiology: an international code of practice. [http://www-pub.iaea.org/MTCD/publications/PDF/TRS457\\_web.pdf](http://www-pub.iaea.org/MTCD/publications/PDF/TRS457_web.pdf)
- [7] Pokyny pro použití rozhodovacích pravidel a uvádění výroků o shodě, ILAC-G8:09/2019, překlad ČIA (Český institut pro akreditaci, o.p.s.) <http://www.cia.cz/Download.ashx?Type=Document&Id=16827>
- [8] BIPM, Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement, JCGM 100:2008, GUM 1995 with minor corrections. [https://www.bipm.org/documents/20126/2071204/JCGM\\_100\\_2008\\_E.pdf/cb0ef43f-baa5-11cf-3f85-4dcd86f77bd6](https://www.bipm.org/documents/20126/2071204/JCGM_100_2008_E.pdf/cb0ef43f-baa5-11cf-3f85-4dcd86f77bd6)  
aktuálně: [Guide to the expression of uncertainty in measurement — Part 6: Developing and using measurement models, JCGM GUM-6 2020](#)
- [9] International vocabulary of Metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM), 3rd edition, JCGM 200:2012. [https://www.bipm.org/documents/20126/2071204/JCGM\\_200\\_2012.pdf/f0e1ad45-d337-bbeb-53a6-15fe649d0ff1](https://www.bipm.org/documents/20126/2071204/JCGM_200_2012.pdf/f0e1ad45-d337-bbeb-53a6-15fe649d0ff1)
- [10] Pokyn pro vyjadřování nejistoty měření (GUM). Sborníky technické harmonizace, ÚNMZ, Praha, 2012. [www.unmz.cz/files/Sborníky TH/GUM - celek -DEF.pdf](http://www.unmz.cz/files/Sborníky_TH/GUM_-_celek_DEF.pdf)
- [11] Terminologie z oblasti metrologie (2. vydání). Sborníky technické harmonizace, ÚNMZ, Praha, 2010. [Terminologie v oblasti metrologie DEF.pdf \(unmz.cz\)](#)
- [12] Nejistoty měření – Část 3: Pokyn pro vyjádření nejistoty měření (GUM:1995), TNI 01 4109-3:2011, česko-anglický, překlad dokumentu ISO/IEC GUIDE 98-3:2008.
- [13] Mezinárodní metrologický slovník – Základní a všeobecné pojmy a přidružené termíny (VIM), TNI 01 0115:2009, česko-anglický, překlad dokumentu ISO/IEC GUIDE 99:2007.
- [14] International Organization for Standardization (ISO), Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, 2nd edition, Geneva, 1995.

- [15] ANDREO, P., BURNS, D.T., SALVAT, F.: On the uncertainties of photon mass energy-absorption coefficients and their ratios for radiation dosimetry, *Phys. Med. Biol.* 57 (2012) 2117–2136.
- [16] TRS 483: IAEA TRS 483 Dosimetry of Small Static Fields Used in External Beam Radiotherapy. An International Code of Practice for Reference and Relative Dose Determination, 2017.
- [17] Doporučení SÚJB: Stanovení absorbované dávky pro nestandardní vysokoenergetická fotonová pole. Stručný návod pro stanovení absorbované dávky za referenčních podmínek pro FFF svazky, CyberKnife, tomoterapeutické ozařovače a Leksellův gama nůž, 2019.
- [18] IAEA Human Health Series No. 31, Accuracy Requirements and Uncertainties in Radiotherapy, 2016.
- [19] Doporučení SÚJB: Bezpečné používání moderních radioterapeutických metod, 2014.
- [20] KONIAROVÁ, I., KOTÍK, L.: Determination of tolerance levels in radiotherapy dosimetry based on statistical interference, *Radiat Prot Dosimetry*, 2019 Dec 31; 186(2-3):367-372. doi: 10.1093/rpd/ncz233.
- [21] IEC, Medical Electrical Equipment: Dosimeters with ionization Chambers and/or Semiconductor Detectors as Used in X-Ray Diagnostic Imaging, Rep. IEC-61674, IEC, Geneva (1997).
- [22] Doporučení SÚJB: Uzavřené radionuklidové zdroje v brachyterapii, 2019.
- [23] ČSN EN ISO 9000: Systémy managementu kvality – Základní principy a slovník. Český normalizační institut, duben 2006.
- [24] ČSN ISO 7870-2: Regulační diagramy – Část 2: Shewhartovy regulační diagramy, 2018.
- [25] Test normality - Saphiro-Wilk: <http://scistatcalc.blogspot.cz/2013/10/shapiro-wilk-test-calculator.html>
- [26] Test normality – Saphiro-Wilk: <http://sdittami.altervista.org/shapirotest/ShapiroTest.html>
- [27] Test normality - Anderson-Darling: <http://bit.ly/1rGyVfu>
- [28] Test normality – Anderson-Darling: <http://www.xuru.org/st/ds.asp>
- [29] ŠTĚDROŇ B., POTŮČEK ML, KNÁPEK J., MAZOUCH P.: Prognostické metody a jejich aplikace. Nakladatelství C.H.Beck, 2012.
- [30] MICHÁLEK, J.: Vyhodnocování způsobilosti a výkonnosti výrobního procesu. ÚTIA AV ČR v.v.i., 2009.
- [31] MICHÁLEK, J.: Statistické řízení procesů. Česká společnost pro jakost, 2014.
- [32] ŠOLC, J.: Parametry TH spekter ve vodě v různých hloubkách a odhad vlivu na kalibrační koeficient komory PTW30013 – MC výpočty, osobní komunikace, 2023.

## Autoři

Původní *Doporučení SÚJB: Vyjádření a používání nejistot v klinické dozimetrii* vypracovali v roce 2016 RNDr. Libor Judas, Ph.D., a RNDr. Dana Kurková, Ph.D., se zohledněním zkušeností odborníků z klinické praxe a připomínek členů Pracovní skupiny SÚRO pro radioterapii.

Aktualizaci a doplnění provedla Ing. Ivana Horáková, CSc. Kapitulu 7.2 a Přílohu A vypracoval RNDr. Lukáš Kotík, Ph.D. Přílohu B vypracovala Ing. Irena Koniarová, Ph.D., pro doporučení SÚJB [19].